Vliv okrajových podmínek na profil časově periodického proudění v trubce

Jan Hrůza

25. března 2020

Osnova

Parciální diferenciální rovnice

Definice (PDR 2. řádu)

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu je výraz ve tvaru

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = 0,$$

kde $u(x)$ je neznámá funkce a $x = (x_1, x_2, ... x_n)^T$.

- Řešení hledáme definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- Kromě rovnice zadáváme okrajové podmínky (hodnoty na $\partial\Omega$)

Navier-Stokesovy rovnice

- Parciální diferenciální rovnice modelující proudění kapalin
- V práci je použita ve tvaru

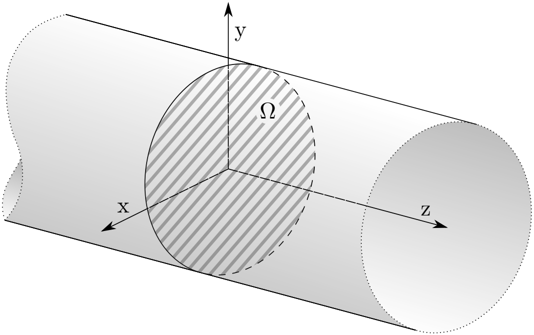
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = -\nabla p$$

- Vektorová funkce **v** lze fyzikálně interpretovat jako rychlost proudění v daném bodě
- Skalární funkce p je tlak v daném bodě

Navier-Stokesovy rovnice a rovnice kontinuity

- Rovnici můžeme dále doplnit o rovnici kontinuity pro nestlačitelné kapaliny
$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$$
- Obě rovnice společně popisují proudění nestlačitelné kapaliny
- V obecném případě je řešení velmi složité, obvykle se používají numerické metody

Téma práce



- Popis proudění v trubce Ω (nekonečně dlouhém válci) protáhlé v ose z
- Tlak se periodicky mění, ale závisí pouze na čase t a souřadnici z

Tlak

- Tlak je ve tvaru

$$p = z \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), T \in (0, \infty)$$

- Takto zvolený tlak indukuje proudění pouze ve směru osy z
- Tlak je tedy T-periodický

Okrajové podmínky

- Okrajové podmínky na $\partial\Omega$

$$\alpha \mathbf{v} + \beta \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{Sn})_\tau = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Fyzikálně můžeme tuto podmínku interpretovat jako tlumení proudění na hranici
- Řešení $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ požadujeme T-periodické

$$\mathbf{v}(0, x, y, z) = \mathbf{v}(T, x, y, z)$$

Předpoklady

- Předpokládáme, že proudění $\mathbf{v}$ je pouze ve směru osy z (ve směru gradientu tlaku)
- Předpokládáme invarianci řešení v vůči posunutí v ose z
- Hledáme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{v}(t, x, y, z) = (0, 0, u(t, x, y))^T$$

- Díky předpokladům se můžeme omezit na libovolný kruhový průřez
- Vzhledem k symetrii trubky by mělo být i řešení symetrické (invariance vůči otočení kolem osy z)

Cíl práce

- Cílem je vhodně zjednodušit rovnice a najít explicitní řešení
- Hledáme popis řešení pomocí Fourierovy metody
- Fourierova metoda: separace proměnných a vyjádření řešení jako součtu funkcí z vhodného systému
- Ukážeme, že řešení získané Fourierovou metodou je skutečně řešení původní rovnice

Zdroje

- E. Maringová: Mathematical analysis of models arising in continuum mechanics with implicitly given rheology and boundary conditions, PhD thesis, Charles University, Prague, 2019
  (zpracování podobného problému na jednodušší možině Ω)

Děkuji za pozornost.