Bakalářská práce: Řetězové zlomky s předepsanou periodou

Martin Kuděj

Vedoucí práce: Mgr. Vítězslav Kala, Ph.D

Konečné řetězové zlomky

- Řetězový zlomek je formální výraz tvaru:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

- kde $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$
- Značíme $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$
- Každé racionální číslo lze jednoznačně vyjádřit jako konečný řetězový zlomek.

Nekonečné řetězové zlomky

- Mějme $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$
- Nekonečný řetězový zlomek je $\lim_{n \to \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n]$
- Tuto limitu značíme $[a_0, a_1, a_2, \dots]$
- Každé iracionální číslo lze jednoznačně vyjádřit jako nekonečný řetězový zlomek.
- Periodické řetězové zlomky s periodou $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ značíme $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_n}]$
- Čistě periodický řetězový zlomek je $[\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$

Klasifikace nekonečných řetězových zlomků

Věta

α algebraické stupně 2 $\iff$ řetězový zlomek čísla α je od nějakého místa periodický

Definice (Redukovaná kvadratická iracionalita)

Redukovaná kvadratická iracionalita je číslo $a + b\sqrt{N} > 1$, kde $a, b \in \mathbb{Q}$, $N \in \mathbb{N}$ bezčtvercové tak, že $a - b\sqrt{N} \in (-1, 0)$

Věta

α redukovaná kvadratická iracionalita $\iff$ řetězový zlomek čísla α je čistě periodický

Obsah bakalářské práce

Dokážeme, že:

- $\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_k, 2a_0}]$, kde $(a_1, \ldots, a_k)$ je symetrická
- Je-li dána symetrická posloupnost $(a_1, \ldots, a_k)$, splňující jistou kongruenci modulo 2, potom existuje nekonečně mnoho N takových, že $\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_k, 2a_0}]$

Chceme zkoumat:

- Vlastnosti takto získaných N modulo malá prvočísla

K čemu je to dobré

- Aproximace iracionálního čísla racionálními
- Řešení Pellovy rovnice $x^2 - Ny^2 = 1$

Zdroje

- C. D. Olds, Continued Fractions, Random House 1963.
- C. Friesen, On continued fractions of given period, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 8-14.