Aplikace Groebnerových bází

Marie Skalová

1. dubna 2020

Osnova

Osnova

Úvod - téma bakalářské práce

- Propojení syntetické geometrie a soustav polynomiálních rovnic skrze automatické dokazování geometrických problémů
- Využití nástrojů algebraické geometrie
- Hledání Groebnerovy báze ideálu okruhu polynomů
- Využití geometrických zobrazení (např. kruhová inverze)

Osnova

Převod geometrického problému do rovnic

Definice

(interní značení) Mějme geometrický problém, jeho předpoklady nazveme *hypotézami*, jeho závěr nazveme *výrokem*.

- Geometrický problém = hypotéza + výrok
- Pokud se *hypotéza* i *výrok* skládají ze vztahů mezi objekty jako jsou body nebo přímky, lze je převést na soustavu polynomiálních rovnic
- Na tuto soustavu následně aplikujeme nástroje algebraické geometrie

Převod geometrického problému do rovnic

Značení: bod $A = (a_1, \ldots, a_n)$

Příklad

Hypotéza: ABCD tvoří rovnoběžník (v $\mathbb{R}^2$)
Ekvivalentně $AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$
Volbou souřadného systému $(A, \overline{AB})$ *získáme rovnice* $d_2 - c_2 = 0$, $d_1 - b_1 - c_1 = 0$.
Geometricky to znamená, že bod D je jednoznačně určen body A, B, C.

Značení: proměnné, které lze volit libovolně, značíme $\mathbf{u_i}$, proměnné, které jsou jednoznačně určené ostatními, značíme $\mathbf{x_i}$

Využití nástrojů algebraické geometrie

Připomenutí:

Definice

Buď $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, K těleso. **Množinu nul** množiny S definujeme jako $\mathbf{V}(S) := \{A \in K^n | f(A) = 0 \forall f \in S\}$

Definice

Buď $X \subseteq K^n$, řekneme, že X je **algebraická množina** pokud $\exists S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tž. $X = \mathbf{V}(S)$

Definice

Buď V algebraická množina, potom **ideál** této **množiny** definujeme jako $\mathbf{I}(V) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f(A) = 0 \forall A \in V\}$

Využití nástrojů algebraické geometrie

- Rovnice získané z *hypotéz*:

$$h_i(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, n$$

- Rovnice dokazující *výrok*:

$$g(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Definice

Řekneme, že *výrok* g **plyne čistě** z *hypotéz* $h_1, \ldots, h_n$, pokud pro $V = \mathbf{V}(h_1, \ldots, h_n)$ platí $g \in \mathbf{I}(V) \subset \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n]$.

Definice

Řekneme, že *výrok* g **plyne** z *hypotéz* $h_1, \ldots, h_n$, pokud pro $V' = W_1 \cup \cdots \cup W_p \subseteq \mathbf{V}(h_1, \ldots, h_n)$, kde $u_1, \ldots, u_n$ jsou algebraicky nezávislá na $W_1, \ldots, W_p$, platí $g \in \mathbf{I}(V') \subset \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n]$.

Grobenerova báze

Značení: $\mathbb{Z}^n_{\geq 0} = \mathbb{Z}^n_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Definice

Monomiální uspořádání na $K[x_1, \ldots, x_n]$, K těleso, je relace $>$ na $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ splňující:

1. $>$ je lineární uspořádání
2. Pokud $\alpha > \beta$ a $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, potom $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$
3. Každá neprázdná podmnožina $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ má nejmenší prvek

Groebnerova báze

Definice

(Značení) Buď K těleso.
Pro $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polynom definujeme $\mathbf{LT(f)}$:= vedoucí člen f.
Pro I ideál definujeme $\mathbf{LT(I)} := \{LT(f) | f \in I\}$

Definice

Mějme monomiální uspořádání a I ideál $K[x_1, \ldots, x_n]$, K těleso.
$G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq I$ konečná je **Groebnerova báze** (nebo také **standardní báze**) pokud $\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_s)\rangle = \langle LT(I)\rangle$

- K čemu to je dobré?
  - Existuje vždy
  - Lze z toho vidět některé vlastnosti ideálu

Vyhodnocení

Věta

Buď K těleso, $I = (f_1, \ldots, f_n) \subseteq K[x_1, \ldots, x_m]$ ideál a $f \in K[x_1, \ldots, x_m]$ polynom. Potom
$f \in \sqrt{I} \iff 1 \in \tilde{I} = (f_1, \ldots, f_n, 1 - yf) \subseteq K[x_1, \ldots, x_m, y]$
$(\iff \tilde{I} = K[x_1, \ldots, x_m, y])$

Věta

Pokud $g \in \sqrt{(h_1, \ldots, h_n)}$, potom g plyne čistě z $h_1, \ldots, h_n$

- $\{1\}$ je Groebenerova báze $\Rightarrow g$ plyne čistě z $h_1, \ldots, h_n$

Osnova

Cíle bakalářské práce

- Studium metody automatického dokazování geometrických problémů
- Návod na obecné řešení touto metodou
- Nalezení limit metody
- Vylepšení metody

Literatura

- D. Cox, J. Little, D. O'Shea: Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007

Děkuji za pozornost. Otázky?