# Řešení Poiseuilleova a rovinného Couettova proudění s dynamickými okrajovými podmínkami

Martin Vejvoda

1. dubna 2020

# Osnova

# Úvod

- Historie mechaniky tekutin se datuje již od starověku

# Úvod

- Historie mechaniky tekutin se datuje již od starověku
- Jako příklad můžeme uvést Archimédův zákon

# Úvod

- Historie mechaniky tekutin se datuje již od starověku
- Jako příklad můžeme uvést Archimédův zákon
- V první polovině devatenáctého století odvodili fyzikové C. L. Navier a G. G. Stokes své rovnice popisující proudění

# Úvod

- Historie mechaniky tekutin se datuje již od starověku
- Jako příklad můžeme uvést Archimédův zákon
- V první polovině devatenáctého století odvodili fyzikové C. L. Navier a G. G. Stokes své rovnice popisující proudění
- Tyto rovnice našly uplatnění nejen při konstruování lodí a letadel, ale například i při modelování kouře v počítačových hrách

# Definice

## Definice

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu je rovnice $F(x, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u) = 0$, kde $i, j = 1, \dots n$, F je známá skalární (nebo vektorová) funkce a $u$ je neznámá funkce (řešení).

# Definice

## Definice

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu je rovnice $F(x, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u) = 0$, kde $i, j = 1, \dots n$, F je známá skalární (nebo vektorová) funkce a $u$ je neznámá funkce (řešení).

- PDR řešíme v nějaké otevřené oblasti $\Omega$

# Definice

**Definice**

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu je rovnice $F(x, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u) = 0$, kde $i, j = 1, \ldots n$, F je známá skalární (nebo vektorová) funkce a $u$ je neznámá funkce (řešení).

- PDR řešíme v nějaké otevřené oblasti $\Omega$
- Často požadujeme, aby se řešení na hranici $\partial\Omega$ chovalo určitým způsobem (například nabývalo konkrétních hodnot)

# Definice

## Definice

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu je rovnice $F(x, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u) = 0$, kde $i, j = 1, \dots n$, F je známá skalární (nebo vektorová) funkce a $u$ je neznámá funkce (řešení).

- PDR řešíme v nějaké otevřené oblasti $\Omega$
- Často požadujeme, aby se řešení na hranici $\partial\Omega$ chovalo určitým způsobem (například nabývalo konkrétních hodnot)
- Proto předepisujeme okrajové podmínky

# Definice II

**Definice**

Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f = f(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelná funkce.

Gradientem $f$ budeme rozumět vektor $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$.

# Definice II

## Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f = f(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelná funkce.

Gradientem $f$ budeme rozumět vektor $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$.

## Definice

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelná funkce.
Divergenci $\mathbf{f}$ definujeme jako $\mathrm{div}\mathbf{f} = \partial_x \mathbf{f}_x + \partial_y \mathbf{f}_y + \partial_z \mathbf{f}_z$.

# Definice III

## Definice

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je dvakrát diferencovatelná funkce. Laplaceovým operátorem aplikovaným na $\mathbf{f}$ rozumíme

$$\Delta \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_{xx}\mathbf{f}_x + \partial_{yy}\mathbf{f}_x + \partial_{zz}\mathbf{f}_x \\ \partial_{xx}\mathbf{f}_y + \partial_{yy}\mathbf{f}_y + \partial_{zz}\mathbf{f}_y \\ \partial_{xx}\mathbf{f}_z + \partial_{yy}\mathbf{f}_z + \partial_{zz}\mathbf{f}_z \end{pmatrix}.$$

# Definice III

## Definice

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je dvakrát diferencovatelná funkce. Laplaceovým operátorem aplikovaným na $\mathbf{f}$ rozumíme

$$\Delta \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_{xx}\mathbf{f}_x + \partial_{yy}\mathbf{f}_x + \partial_{zz}\mathbf{f}_x \\ \partial_{xx}\mathbf{f}_y + \partial_{yy}\mathbf{f}_y + \partial_{zz}\mathbf{f}_y \\ \partial_{xx}\mathbf{f}_z + \partial_{yy}\mathbf{f}_z + \partial_{zz}\mathbf{f}_z \end{pmatrix}.$$

## Definice

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelná funkce. Výrazem $\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{f}$ rozumíme $\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x\partial_x\mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y\partial_y\mathbf{f}_x + \mathbf{f}_z\partial_z\mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_x\partial_x\mathbf{f}_y + \mathbf{f}_y\partial_y\mathbf{f}_y + \mathbf{f}_z\partial_z\mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_x\partial_x\mathbf{f}_z + \mathbf{f}_y\partial_y\mathbf{f}_z + \mathbf{f}_z\partial_z\mathbf{f}_z \end{pmatrix}$.

# Navier-Stokesovy rovnice

- Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu vypadají následovně

# Navier-Stokesovy rovnice

- Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu vypadají následovně

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p$$
$$\mathrm{div} \mathbf{v} = 0$$

# Navier-Stokesovy rovnice

- Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu vypadají následovně
$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p$$
$$\mathrm{div} \mathbf{v} = 0$$
- $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ představuje rychlost, $\nu$ je viskozita tekutiny a $p(t, \mathbf{x})$ je tlak

# Navier-Stokesovy rovnice

- Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu vypadají následovně
$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p$$
$$\mathrm{div} \mathbf{v} = 0$$
- $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ představuje rychlost, $\nu$ je viskozita tekutiny a $p(t, \mathbf{x})$ je tlak
- Navier-Stokesovy rovnice jsou obecně velmi obtížně řešitelné, budeme proto uvažovat proudění ve speciální geometrii

# Couettovo proudění

- Bude nás zajímat tzv. rovinné Couettovo proudění

# Couettovo proudění

- Bude nás zajímat tzv. rovinné Couettovo proudění
- Jedná se o proudění s konstatním tlakem mezi dvěma ronvoběžnými deskami

# Couettovo proudění

- Bude nás zajímat tzv. rovinné Couettovo proudění
- Jedná se o proudění s konstatním tlakem mezi dvěma ronvoběžnými deskami
- Jedna z desek se pohybuje v tečném směru, což způsobuje proudění tekutiny

# Couettovo proudění II

- Konstatní tlak znamená, že $\nabla p = 0$

# Couettovo proudění II

- Konstatní tlak znamená, že $\nabla p = 0$
- Desky budeme uvažovat nekonečné a nepropustné

# Couettovo proudění II

- Konstatní tlak znamená, že $\nabla p = 0$
- Desky budeme uvažovat nekonečné a nepropustné
- Vymezují tedy oblast $\mathbb{R} \times (0, h) \times \mathbb{R}$, kde $h$ je vzdálenost desek od sebe

# Couettovo proudění II

- Konstatní tlak znamená, že $\nabla p = 0$
- Desky budeme uvažovat nekonečné a nepropustné
- Vymezují tedy oblast $\mathbb{R} \times (0, h) \times \mathbb{R}$, kde $h$ je vzdálenost desek od sebe
- Nepropustnost nám dává okrajovou podmínku $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, kde $\mathbf{n} = (0, \pm 1, 0)$ je normálový vektor desky

# Couettovo proudění II

- Konstatní tlak znamená, že $\nabla p = 0$
- Desky budeme uvažovat nekonečné a nepropustné
- Vymezují tedy oblast $\mathbb{R} \times (0, h) \times \mathbb{R}$, kde $h$ je vzdálenost desek od sebe
- Nepropustnost nám dává okrajovou podmínku $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, kde $\mathbf{n} = (0, \pm 1, 0)$ je normálový vektor desky
- Vektor rychlosti se zjednoduší na $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (u(t, y), 0, 0)$

# Couettovo proudění III

- Navier-Stokesovy rovnice se také zjednoduší

# Couettovo proudění III

- Navier-Stokesovy rovnice se také zjednoduší

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} &= 0, \\
\partial_t v_i + \sum_{k=1}^{3} v_k \partial_{x_k} v_i - \nu \Delta v_i &= 0, \qquad i = 1, 2, 3 \\
\partial_t u(t, y) - \nu \partial_{yy} u(t, y) &= 0
\end{aligned}
$$

# Okrajové podmínky

- Jako další okrajovou podmínku budeme předpokládat

# Okrajové podmínky

- Jako další okrajovou podmínku budeme předpokládat

$$\theta\left(\alpha(u - V) + \beta\partial_t(u - V)\right) + (1 - \theta)\nu\partial_y u = 0$$

- Kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ a $\theta \in [0, 1]$ a $V(t)$ je rychlost desky

# Okrajové podmínky

- Jako další okrajovou podmínku budeme předpokládat

$$\theta\left(\alpha(u-V)+\beta\partial_t(u-V)\right)+(1-\theta)\nu\partial_y u=0$$

- Kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ a $\theta \in [0,1]$ a $V(t)$ je rychlost desky
- Vhodnou volbou parametrů je možné zařídit různé okrajové podmnínky

# Okrajové podmínky

- Jako další okrajovou podmínku budeme předpokládat

$$\theta\left(\alpha(u-V)+\beta\partial_t(u-V)\right)+(1-\theta)\nu\partial_y u=0$$

- Kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ a $\theta \in [0,1]$ a $V(t)$ je rychlost desky
- Vhodnou volbou parametrů je možné zařídit různé okrajové podmnínky
- Například podmínka $u - V = 0$ znamená, že tekutina má stejnou rychlost jako deska a tedy na desce ulpívá

# Cíl práce

- Cílem práce je studovat vliv různých okrajových podmínek na proudění

# Cíl práce

- Cílem práce je studovat vliv různých okrajových podmínek na proudění
- K tomu poslouží metoda abstraktních Fourierových řad

# Cíl práce

- Cílem práce je studovat vliv různých okrajových podmínek na proudění
- K tomu poslouží metoda abstraktních Fourierových řad
- Řešení rovnice budeme hledat ve tvaru $u(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(y)$, kde $u_i$ je vhodná ortonormální báze

Děkuji za pozornost