

Domácí úlohy z Úvodu do teorie grup

2020/21

Budou zadány 4 série domácích úkolů každá za 25 bodů. Na získání zápočtu bude třeba získat 50 bodů za 100 možných.

Všechna svá tvrzení pečlivě odůvodňujte, tvrzení z přednášek i cvičení používejte bez důkazu (ale s jasným odkazem). Řešení v pdf odevzdávejte do SIS.

3. SÉRIE (DO 1.12., 22:00)

3.1. Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy (a) S_7 , (b) D_{12} , (c) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{40}$.

6 bodů

3.2. Dokažte, že nad sedmiprvkovým tělesem \mathbb{F}_7 tvoří množina

$$\{(l_{ij}) \in GL_4(\mathbb{F}_7) \mid \forall i : l_{ii} = 1, \forall i, j : i < j \rightarrow l_{ij} = 0\}$$

Sylowovu 7-podgrupu grupy $GL_4(\mathbb{F}_7)$ regulárních matic 4×4 .

6 bodů

3.3. Zkonstruujte nekomutativní nilpotentní grupu řádu 27 a určete stupeň její nilpotence.

Hint: Použijte semidirektní součin.

6 bodů

3.4. Nechť $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je konečná grupa p prvočíslo, $P \in Syl_p(\mathcal{G})$ a $H \trianglelefteq \mathcal{G}$. Dokažte, že $H \cap P \in Syl_p(H)$ a že $HP/H \in Syl_p(\mathcal{G}/H)$.

Hint: Všimněte si že $H \cap P$ i HP/H jsou p -grupy a spočítejte, že jsou to nutně maximální p -grupy.

7 bodů