CVIČENÍ Z ÚVODU DO TEORIE GRUP

Opakování:

(1) Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy (a) S_4 (b) D_{10}.

7. Nilpotence a p-podgrupy

7.1. **Sylowovy podgrupy.**

7.1. Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy
(a) S_6, (b) $\mathbb{Z}_{200} \times \mathbb{Z}_{300}$, (c) A_4, (d) A_6.

7.2. **Nilpotentní grupy.**

7.2. Rozhodněte, zda existuje konečná nilpotentní grupa $\mathcal{G}$, pro kterou $|Syl_5(\mathcal{G})| > 1$.

7.3. Popište (až na izomorfismus) všechny Sylowovy podgrupy nilpotentní grupy $\mathcal{G}$ jestliže (a) je řádu 105, (b) není cyklická a je řádu 99. Jaký je stupeň nilpotence těchto grup? $|Syl_5(\mathcal{G})| > 1$.

7.4. Nechť $n = 2m > 4$. Na množině $\{1, \ldots, n\}$ zavedeme ekvivalenci $\sim$ pravidlem $a \sim b$, právě když $a \equiv b \pmod m$, a definujme bijekci $b : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}/\sim$ předpisem $b(a) = \{a, a + m\}$. Dále pro $\sigma \in D_{2n}$ definujme $[\sigma] \in S(\{1, \ldots, n\}/\sim)$ předpisem $[\sigma]([a]_\sim) = [\sigma(a)]_\sim$. Dokažte, že je zobrazení $\Psi : D_{2n} \to S_m$ zavedené vztahem $\Psi(\sigma) = b^{-1}[\sigma]b$ izomorfismus grup $D_{2n}/Z(D_{2n})$ a D_{2m}.

7.5. Spočítejte iterovaná centra grupy D_{2n} pro $n \geq 3$, rozhodněte, pro která n je grupa D_{2n} nilpotentní, a případně určete stupeň nilpotence.

Date: 11. listopadu 2020.