3 Dobře rozložený polynom – hnojivo algebry

Zadání
Verze ze dne 10. března 2024

Cíle cvičení: Tentokrát se podíváme na otázku dělitelnosti, algoritmus dělení a proces rozkládání v okruzích polynomů. Všimneme si, že dělení se zbytkem celých čísel a reálných polynomů funguje obdobně také v obecných okruzích polynomů, a nad některými tělesy se polynomy naučíme rozkládat na součin dále nerozložitelných polynomů. Na závěr se podíváme na kvadratická rozšíření, na nichž budeme zkoumat dělitelnost příště.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 3.1. Dělte se zbytkem polynomy

(a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 3$ a $x^2 + 2$ v $\mathbb{Z}[x]$,

(b) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 3$ a $x^2 + 2$ v $\mathbb{Z}_5[x]$,

(c) $x^{10} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x$ a $x + 1$ v $\mathbb{Z}_2[x]$,

(d) $x^n - 1$ a $x^m - 1$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

Úloha 3.2. Dokažte pomocí 3.1(d), že $x^m - 1 \mid x^n - 1$ v $\mathbb{Z}[x]$ právě tehdy, když $m \mid n$.

Připomeňme, že prvek a se nazývá *ireducibilní*, pokud $a \neq 0$, a není invertibilní a pro každý rozklad $a = bc$ platí $b \parallel 1$ nebo $c \parallel 1$.

Úloha 3.3. Dokažte, že všechny ireducibilní polynomy v $\mathbb{R}[x]$ mají stupeň ≤ 2.

Úloha 3.4. Spočítejte v oborech $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ a $\mathbb{Z}_5[x]$ ireducibilní rozklady polynomů $x^3 - 2$, $x^4 - x^2 - 2 = (x^2 + 1)(x^2 - 2)$.

Úloha 3.5. Najděte všechny ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}_2$ stupně nejvýše 3.

Úloha 3.6. Porovnejte pomocí inkluze podobory tělesa komplexních čísel a ukažte, které z inkluzí jsou ostré:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{24}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$,

(b) $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{24}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$,

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ a $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$,

A teď něco pro zlepšení nálady:

Úloha 3.7. Najděte všechny ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}_2$ stupně 4.

Úloha 3.8. Dokažte, že pro každé $t \in \mathbb{Q}$ a $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ platí, že je $f(x)$ ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$, právě když je $f(x + t)$ ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$.

Úloha 3.9. Najděte nenulový polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ co nejmenšího stupně takový, že čísla 1 a i jsou jeho kořenem a $f(3) = f(4)$.

Úloha 3.10. Je-li p prvočíslo a $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, dokažte, že v oboru $\mathbb{Z}_p[x]$ platí

(a) $x - j$ dělí $x^{p-1} - 1$ pro každé $j \in \mathbb{Z}_p^*$,

(b) $x^{p-1} - 1 = \prod_{j \in \mathbb{Z}_p^*}(x - j)$.

Úloha 3.11.* Nechť jsou p, q dvě různá lichá prvočísla.

(a) Dokažte, že má polynom $x^3 + 3x^2 + 2x$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 9 kořenů.

(b) Rozhodněte, zda existují $a, b \in \mathbb{Z}_{pq}$, aby měl polynom $x^2 + ax + b$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 3 kořeny.

Úloha 3.12. Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ stupně 3, který má aspoň 9 různých kořenů v okruhu $\mathbb{Z}_{15}$.

Úloha 3.13. Buď T těleso, $f \in T[y]$ a $h \in T[x, y]$. Dokažte, že $(x - f) \mid h$ v $T[x, y]$ právě tehdy, když $h(f, y) = 0$.

Úloha 3.14. Buď $u \in T$ kořen polynomu $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in T[x]$, jehož absolutní člen je nenulový. Vyjádřete u^{-1} jako lineární kombinaci mocnin prvku u (s nezáporným exponentem).

Úloha 3.15. Dokažte, že různé polynomy určují nad nekonečným tělesem různá polynomiální zobrazení.

Úloha 3.16. Popište prvky oborů $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{s}]$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{s})$ pro $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Jsou totožné?

Úloha 3.17. Dokažte pečlivě, že prvookruh je skutečně podokruhem. Co je prvokruhem podokruhů $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ a $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$?

Úloha 3.18. Rozhodněte, zda je polynom $x^4 + x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$.

Úloha 3.19. Najděte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše 3 v $\mathbb{Z}_3[x]$

Úloha 3.20. Najděte v $\mathbb{Z}[x]$ ireducibilní polynom, jehož kořenem je číslo $a = e^{\pi i/3}$.