8 Řád a neřád v teorii grup

Zadání

Cvičení 10. a 11. dubna, verze ze dne 9. dubna 2024.

Cíle cvičení: Tentokrát si důkladně rozmyslíme, jak nám pomáhá Lagrangeova věta při zjišťování řádů prvků či indexů podgrup dané grupy. Tam, kam už její dlouhá a lačná chapadla nedosáhnou, nám nezbude než zapojit své počtářské svaly. Nakonec si za odměnu trochu pohrajeme s grupovými homomorfismy.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 8.1. Jaký řád mají následující prvky v grupách? (a) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$, (b) 7 a 9 v $\mathbb{Z}_{20}^*$, (c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$, (d) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$, $(1\,2)(5\,6\,8\,9)$ v $\mathbf{S}_9$ a $\mathbf{A}_{2020}$?

Úloha 8.2. Najděte nejmenší podgrupu grupy $\mathbf{S}_5$, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$, tj. $\langle \pi \rangle_{\mathbf{S}_5}$. Jakého je řádu a jakého indexu?

Úloha 8.3. Rozhodněte, zda je H podgrupa G a pokud je, určete index $[G : H]$ a všechny pravé rozkladové třídy G podle H, jestliže

(a) $G = \mathbb{Z}_{12}$ a $H = \{0, 3, 6, 9\}$,

(b) $G = \mathbb{Z}_{10}$ a $H = \{0, 3, 6, 9\}$,

(c) $G = \mathbf{S}_3$ a $H = \{\mathrm{id}, (12), (23)\}$,

(d) $G = \mathbf{S}_3$ a $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$.

Úloha 8.4. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou homomorfismy grup. U homomorfismů popište jejich jádra a obrazy.

(a) $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{15}$ je dáno předpisem $f(k) = 5k$ pro každé $k \in \mathbb{Z}_3$,

(b) $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{16}$ je dáno předpisem $f(k) = 5k$ pro každé $k \in \mathbb{Z}_3$,

(c) $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{15}$ je dáno předpisem $f(k) = 4k$ pro každé $k \in \mathbb{Z}_3$,

(d) $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_3$ je dáno předpisem $f(k) = (k) \bmod 3$ pro každé $k \in \mathbb{Z}_{15}$,

(e) $f : \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_3$ je dáno předpisem $f(k) = (k) \bmod 3$ pro každé $k \in \mathbb{Z}_{16}$.

A teď něco pro potěšení ducha i obveselení těla (asi bude spokojenější duch):

Úloha 8.5. Rozhodněte,

(a) zda existují v grupě $\mathbb{Z}_{30}$ podgrupy řádu 4, 5, 6,

(b) zda existují v grupě $\mathbf{S}_{17}$ prvky řádu 71, 72, 80.

Úloha 8.6. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ buď v G indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní?

Úloha 8.7. Jaký řád mají následující prvky v daných grupách?

(a) rotace o $144°$ v D_{10},

(b) matice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0&0&i\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ v $GL_3(\mathbb{C})$

(c) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu grup $\mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_4$.

Úloha 8.8. Najděte všechny homomorfismy

(a) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$,

(b) ze $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$,

(c) ze $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$,

(d) ze $(\mathbb{Z}_2, +, -, 0)$ do $(\mathbf{S}_n, \circ, ^{-1}, \mathrm{id})$,

(e) ze $(\mathbb{Z}_3, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_5, +, -, 0)$,

(f) ze $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_{15}, +, -, 0)$,

(g) ze $(\mathbb{Z}_{15}, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$,

(h) ze $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0, 0))$ do $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$,

(i) ze $(\mathbb{Z}_4, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, -, (0, 0))$,

(j) ze $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ do $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$,

(k) ze $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$ do $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Úloha 8.9. Uvažujme grupu $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$. Ukažte, že

(a) v ní mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik,

(b) ji nelze generovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).

Úloha 8.10. Určete, v kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{15}^*$, $\mathbb{Z}_{16}^*$.

Úloha 8.11. Rozhodněte, zda (a) $\{\pi \in A_4 : \pi^2 = \mathrm{id}\}$, (b) $\{\pi \in A_4 : \pi^3 = \mathrm{id}\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{A}_4$. Vyřešte analogickou úlohu pro grupu $\mathbf{S}_4$.

Úloha 8.12. Ukažte, že platí:

(a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$

(b) $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(c) $\langle a, b \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \mathrm{NSD}(a, b) \rangle = \mathrm{NSD}(a, b)\mathbb{Z}$

(d) $\mathbf{S}_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$

(e) $\mathbf{A}_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$.

Úloha 8.13. Dokažte, že $D_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, kde ρ je rotace o úhel $2\pi/n$ a σ je libovolná reflexe.