10 Burnside vám to spočítá!

Zadání
Cvičení 24. a 25. dubna, verze ze dne 24. dubna 2024.

Cíle cvičení: Působení grupy na množině, tedy nápad, kdy si všimneme přirozeného homomorfismu vhodné grupy do grupy permutací na nějaké množině možností, nám umožní řešit jistý typ kombinatorických úloh. Ty se naučíme počítat a zároveň si rozmyslíme, co jsou a jak vypadají orbity tranzitivity daného působení a koutkem oka mrkneme i na související a teoreticky velmi užitečný pojem stabilizátoru prvku.

Úlohy, které bychom určitě měli umět řešit:

Úloha 10.1. Kolik různých náramků lze sestavit ze šesti červených a tří bílých korálků, použijeme-li vždy všech devět? (Předpokládáme, že máme k dispozici potřebné propriety jako šňůrku apod. a že za stejný náhrdelník považujeme každé jeho otočení i překlopení.)

Úloha 10.2. Dětská stavebnice obsahuje 8 červených a 8 modrých dílků ve tvaru rovnostranného trojúhelníka. Kolika způsoby z nich lze sestavit velký rovnostranný trojúhelník o čtyřnásobné hraně

(a) až na otočení,

(b) až na otočení a převrácení podél (některé) výšky?

Úloha 10.3. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete, kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu n barvami (až na orotování čtyřstěnu). Předpokládáme, že každou stěnu barvíme celistvě právě jednou barvou (tedy žádné puntíky či proužky), různé stěny mohou mít totožné barvy a není nutné použít barvy všecky.

Úloha 10.4. Uvažujte působení grupy $G = \mathbf{S}_n$ na množině $\{(a, b) : 1 \leq a, b \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách, tj. $\pi((a, b)) = (\pi(a), \pi(b))$.

(a) Kolik má toto působení orbit a jak jsou velké?

(b) Jak vypadají stabilizátory $G_{(1,1)}$, resp. $G_{(1,2)}$ a jaký mají index?

A kdyby toho bylo málo, máme ještě:

Úloha 10.5. Anička chce pro každého ze svých 506 facebookových přátel vytvořit podobný (ale ne stejný) odznáček, rozhodne se proto pro následující návrh: rozdělí kruh na 12 stejných výsečí a každou výseč obarví. Kolik minimálně barev musí použít, aby splnila, co si předsevzala, předpokládáme-li, že dva odznáčky jsou různé, nelze-li jeden získat z druhého pootočením?

Úloha 10.6. Spočítejte, kolika způsoby lze obarvit stěny krychle (bez ohledu na její polohu) pomocí n barev.

Úloha 10.7. Uvažujme působení grupy $\mathbf{A}_5$ na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, kteréžto působení je opět definováno po složkách, tj. vztahem

$$\pi(k, l, m) = (\pi(k), \pi(l), \pi(m)) \text{ pro každé } \pi \in \mathbf{A}_5.$$

Určete počet orbit tohoto působení a nějakou množinu reprezentantů těchto orbit.

Úloha 10.8. Nechť $n \geq k$. Uvažujte působení grupy $\mathbf{S}_n$ na množině $\{(a_1, \ldots, a_k) \mid 1 \leq a_i \leq n\}$, přičemž permutace π působí po složkách. Dokažte, že počet orbit je roven počtu ekvivalencí na k-prvkové množině.

Úloha 10.9. Ukažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na její vlastní nosné množině, kde prvek g působí jako $g(x) = gxg^{-1}$. Pro grupu $\mathbf{S}_4$ vypište orbity a pro každou orbitu určete stabilizátor nějakého jejího prvku.

Úloha 10.10. Uvažujte grupu G řádu p^k pro p prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že existuje prvek $a \in G$ různý od jednotky, který komutuje se všemi ostatními prvky.

Úloha 10.11. Uvažujte působení eukleidovské grupy $\mathbf{E}_2$ na množině $\mathbb{R}^2$.

(a) Která zobrazení obsahuje podgrupa $(\mathbf{E}_2)_x$ pro daný bod x?

(b) Určete, které prvky patří do $\mathbb{R}^2_g$, kde $g \neq \mathrm{id}$ je (i) translace, (ii) rotace, (iii) reflexe.

Úloha 10.12. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte nějakou množinu $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ takovou, aby byla grupa symetrií že $\mathbf{Sym}(X_n)$ izomorfní grupě $\mathbb{Z}_n$ (tedy cyklická řádu).