3. série domácích úloh z Algebry

Řešení odevzdávejte do úterý **9. dubna 24:00.**

Pokud někde v řešení použijete nějakou větu z přednášky, nezapomeňte to explicitně uvést a ověřit předpoklady!

Úloha 1 (2 body)**.** Spočítejte ireducibilní rozklady polynomu $2x^4 - 8$ v oborech

(a) $\mathbb{Z}[x]$, (b) $(\mathbb{Z}[i])[x]$, (c) $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])[x]$. O okruzích $\mathbb{Z}[i]$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ můžete předpokládat, že jsou eukleidovské. (Nezapomínejte u faktorů vysvětlit, proč už jsou ireducibilní.)

Úloha 2 (3 body)**.** Spočtěte největší společný dělitel polynomů

$$36x^3 - 42x^2 + 6 \quad \text{a} \quad 36x^3 - 24x^2 - 48x - 12$$

v oboru $\mathbb{Z}[x]$. Kolik různých řešení existuje?

Úloha 3 (2 body)**.** Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ co nejmenšího stupně splňující podmínky

$$f \equiv 2x + 5 \pmod{x^2 + 2}, \quad f(1) = 2, \quad f(6) = 1.$$

Úloha 4 (3 body)**.** Dokažte, že je okruh $T = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4 + \alpha + 1)$ těleso, určete počet jeho prvků a vyřešte nad ním soustavu rovnic:

$$\begin{array}{lcrcl} \alpha x & + & (\alpha^3 + 1)y & = & 1 \\ (\alpha + 1)x & + & (\alpha^2 + \alpha)y & = & \alpha \end{array}$$

Můžete využívat znalosti ireducibilních polynomů v $\mathbb{Z}_2[\alpha]$ stupně nejvýše tři (bylo na cvičení), ale ireducibilitu polynomu vyššího stupně v případě potřeby vysvětlete.