Teorie čísel: Cvičení 2 – výsledky, nápovědy, vzorová řešení

23. února 2023

Simona Hlavinková, email: simonkahlavinkova@gmail.com

Nápovědy:

3. Napište si několik prvních hodnot, uhodněte, co má vyjít, a dokažte indukcí.
4. Není co dokazovat, plyne to přímo z definice.
5. Rozmyslete si, že postup, kterým jsme spočítali řetězové zlomky v příkladech 0 a 2, se dá použít vždy. Najděte zdůvodnění, proč tento algoritmus časem skončí. To, že jsou vždy dvě možné hodnoty, plyne z rovnosti $[a_0, \dots, a_n, 1] = [a_0, \dots, a_n + 1]$.
7. Uvědomte si, kolik zlomků má v základním tvaru jmenovatel přesně k.
8. První nerovnost je elementární, nerovnost pro Fareyho zlomky plyne z Cauchyho věty.
9. Jsou-li $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sousední Fareyho zlomky, uvažte $1 - \frac{a}{b}$ a $1 - \frac{c}{d}$.
10. Uvažte rozdíl mezi sousedními Fareyho zlomky (viz příklad 8.)
12. Navzdory tomu, co jsem zmiňoval na hodině, tvrzení platí. Opravdu se jím nezabývejte, k ničemu to nepotřebujete.

Výsledky:

0. $\frac{116}{19}$; $[1, 1, 1, 2]$
1. $\frac{131}{41}$; $\frac{43}{30}$; $\frac{102}{47}$
2. $[1, 3]$; $[3, 1, 1, 3]$; $[4, 2, 6, 7]$
3. $\frac{F(n-1)}{F(n)}$, kde $F(n)$ je Fibonacciho posloupnost začínající $F(0) = F(1) = 1$.
6. $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right)$. Jmenovatelé tvoří palindrom.
7. $1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$, kde $\varphi(k)$ je Eulerova funkce.[1]
8. Opačná implikace platí, pokud jsou zlomky v základním tvaru a leží v intervalu $(0, 1)$.
11. Označme $\frac{p}{q} = [0, a_1, \dots, a_n, 1]$ daný řetězový zlomek končící 1.[2] Vedlejší zlomky budou právě $[0, a_1, \dots, a_n]$ a $[0, a_1, \dots, a_{n-1}]$.

Vybraná vzorová řešení:

Věta (Cauchy)**.** *Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou sousední položky seznamu F_n. Pak $bc - ad = 1$.*

Důkaz. Víme, že $\mathrm{NSD}(-a, b) = 1$. Díky Bézoutově rovnosti existuje celočíselné řešení (x_0, y_0) rovnice $bx - ay = 1$. Zjevně jsou řešením i všechny dvojice $(x, y) = (x_0 + ra, y_0 + rb)$ pro $r \in \mathbb{Z}$. Volbou vhodného r najdeme řešení (x, y), kde $0 \le n - b < y \le n$.

Jistě $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$, neboť $bx - ay = 1$. Dále dostaneme $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{xb - ya}{yb} = \frac{1}{yb} > 0$. Dohromady vidíme, že buď $\frac{x}{y} \in F_n$, nebo $\frac{x}{y} > 1$. Tak jako tak $\frac{x}{y} \ge \frac{c}{d}$, jelikož zlomek $\frac{c}{d}$ v F_n bezprostředně následuje po $\frac{a}{b}$.

Předpokládejme nyní (pro spor) $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$. Pak $xd - cy \ge 1$, neboť jde o celé číslo. Podobně $bc - ad \ge 1$. Dohromady dostaneme

$$\frac{1}{yb} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{x}{y} - \frac{c}{d} + \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{xd - cy}{dy} + \frac{bc - ad}{bd} \ge \frac{1}{dy} + \frac{1}{bd} = \frac{b + y}{bdy.} > \frac{n}{bdy}.$$

Tudíž $d > n$. To je ale spor s tím, že $\frac{c}{d} \in F_n$. Předpoklad tak byl mylný a musí nastat $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$. Tím je důkaz dokončen, jelikož $1 = bx - ay = bc - ad$. $\square$

---

[1] Je zajímavé, že posloupnost $|F_1|, |F_2|, \dots$ začíná $2, 3, 5, 7, 11, 13$, takže pro $n \le 6$ platí, že $|F_n|$ je n-té prvočíslo. Podobnost je ale čistě náhodná: $|F_7| = 19$, což je osmé prvočíslo, a $|F_{10}| = 33$ už vůbec není prvočíslo.

[2] Každé kladné racionální číslo kromě jedničky se dá zapsat pomocí právě dvou řetězových zlomků, z nichž jeden končí jedničkou a druhý ne, viz příklad 5.

9. Vezměme sousední Fareyho zlomky $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ řádu n (tj. se jmenovateli nejvýše n). Stačí dokázat, že $\frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$ a $\frac{d-c}{d} = 1 - \frac{c}{d}$ jsou také sousední Fareyho zlomky řádu n, a to v opačném pořadí.

   Zlomek $\frac{b-a}{b}$ je díky $\mathrm{NSD}(b-a, b) = \mathrm{NSD}(-a, b)$ v základním tvaru; jmenovatel splňuje $b \leq n$ a čitatel je kladný a nejvýše rovný jmenovateli, takže jde o Fareyho zlomek řádu n. Stejně dokážeme, že i $\frac{d-c}{d}$ je Fareyho zlomek řádu n. Zjevně $1 - \frac{c}{d} < 1 - \frac{a}{b}$.

   Zbývá si všimnout, že se mezi nové zlomky nevejde žádný jiný zlomek se jmenovatelem $q \leq n$. I to je ale snadné: Kdyby $1 - \frac{c}{d} < \frac{p}{q} < 1 - \frac{a}{b}$, pak bychom měli $\frac{a}{b} < \frac{q-p}{q} < \frac{c}{d}$; to nejde, protože $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ jsou sousední Fareyho zlomky.

10. Když nahradíme α jeho „necelou částí“ $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$, můžeme celou dobu BÚNO brát $0 < \alpha < 1$. Pro snadnější vyjadřování budeme v tomto řešení zlomek $\frac{p}{q}$ splňující $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ nazývat *vhodný*.

    Pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ uvažujme posloupnost Fareyho zlomků F_n. Číslo α padne mezi dva takové zlomky, označme je $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, a to tak, aby $b \leq d$. Z Cauchyho věty (resp. cvičení 7) máme $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| = \frac{1}{bd}$. Číslo α leží uvnitř tohoto intervalu, takže $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{bd} \leq \frac{1}{b^2}$. Zlomek $\frac{a}{b}$ tedy má požadovanou vlastnost. Dokázali jsme následující tvrzení: *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme f, f' ty prvky F_n, pro které $\alpha \in (f, f')$. Pak je alespoň jeden ze zlomků f, f' vhodný.* (Je to ten s menším jmenovatelem.)

    Nyní už je snadné zdůvodnit, že je vhodných zlomků nekonečně mnoho. Protože je α iracionální (a tedy má od každého vhodného zlomku kladnou vzdálenost), stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ nalezneme vhodný zlomek g splňující $|\alpha - g| < \varepsilon$. Díky už dokázanému tvrzení postačí nalézt takové N, aby mezery mezi sousedními zlomky v F_N byly menší než ε; a takové N zjevně existuje, jelikož mezery mezi sousedními zlomky v F_N jsou nejvýše $\frac{1}{N}$.

12. Pro neposlušné: Nejdřív by se dokázala rovnost $\sum_{d=1}^{n} |F_{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}| = \frac{(n+3)n}{2}$, a to úvahou, že se obě strany rovnají počtu *všech* výrazů tvaru $\frac{p}{q}$, kde $0 \leq p \leq q \leq n$, $q \neq 0$, tj. i těch soudělných.

    Z tohoto vztahu lze první rovnost získat dvojitým použitím následujícího obecného tvrzení: *Buďte f, g libovolné funkce definované na přirozených číslech. Pak jsou následující dvě rovnosti ekvivalentní: $g(n) = \sum_{m=1}^{n} f\big(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor\big)$ a $f(n) = \sum_{m=1}^{n} \mu(m) g\big(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor\big)$.* Důkaz tohoto tvrzení, které je určitým zobecněním Möbiovy invertovací formule, lze najít třeba tady.