Teorie čísel: Cvičení 5

Simona Hlavinková; email: simonkahlavinkova@gmail.com

Definice. Zlomek $\frac{r}{s}$ v základním tvaru, kde $s > 0$, je *dobrá aproximace* čísla $\xi \in \mathbb{R}$, pokud

- pro každé $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, kde $1 \leq q < s$, platí $|r - s\xi| < |p - q\xi|$;
- navíc pro všechna $p \in \mathbb{Z}$ platí $|r - s\xi| \leq |p - s\xi|$.

Věta. *Buď $\xi > 0$, $\{\xi\} \neq 0, \frac{1}{2}$. Pak jeho sblížené zlomky*

$$\frac{p_n}{q_n}, \ \textit{kde} \begin{cases} n \geq 0, & \textit{pokud } 0 < \{\xi\} < \frac{1}{2}, \\ n \geq 1, & \textit{pokud } \frac{1}{2} < \{\xi\} < 1, \end{cases}$$

dávají právě všechny dobré aproximace čísla ξ.

0. Určete všechny dobré aproximace čísel $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{3}$.

! 1. Určete všechny dobré aproximace čísel $\frac{3}{10}$ a $\frac{7}{8}$.

! 2. Určete všechny dobré aproximace čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, pokud $\{\alpha\} = 0$ nebo $\{\alpha\} = \frac{1}{2}$.

3. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Určete všechny jeho dobré aproximace se jmenovatelem 1.

4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \{\alpha\} \neq \frac{1}{2}$, $n > \alpha > 0$. Označme $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ a $n - \alpha = [b_0, b_1, \ldots]$. Ukažte, že pak platí:
   (a) $b_0 = n - a_0 - 1$;
   (b) $a_1 = 1 \iff \{\alpha\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \iff b_1 \geq 2$;
   (c) $\frac{r}{s}$ je dobrá aproximace $\alpha \iff n - \frac{r}{s}$ je dobrá aproximace $n - \alpha$.

5. Určete první čtyři koeficienty v řetězovém zlomku a první čtyři dobré aproximace čísla $\pi = 3{,}14159265\ldots$

6. Nechť $n > 0$ a nechť $\frac{p_n}{q_n}$ je n-tý sblížený zlomek čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$. Dokažte, že pak každý jiný zlomek $\frac{p}{q}$, kde $1 \leq q \leq q_n$, splňuje $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$.

∗ 7. Ukažte, že alespoň jeden z libovolných dvou po sobě jdoucích sblížených zlomků čísla $\alpha > 0$ splňuje $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$.

8. Ukažte, že pokud $\{\alpha\} > \frac{1}{2}$, pak sblížené zlomky $\frac{p_n}{q_n}$ pro $n \geq 1$ jsou všechny dobré aproximace α.

Definice. Buď $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitivní n-tá odmocnina z 1. Pak n-*tý cyklotomický polynom* definujeme vztahem $t_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq a \leq n \\ \mathrm{NSD}(a,n)=1}} (x - \zeta_n^a)$, kde násobíme přes všechna a nesoudělná s n.

Věta. *Platí $\deg(t_n) = \varphi(n)$. Dále $x^n - 1 = \prod_{d|n} t_d(x)$, kde násobíme přes všechny kladné dělitele n.*

! 9. Rozložte polynomy $x^{14} - 1$ a $x^{15} - 1$ na součin ireducibilních polynomů v $\mathbb{Q}[x]$. Určete čtrnáctý a patnáctý cyklotomický polynom.

! 10. Rozložte polynom $x^n - 1$ na součin ireducibilních polynomů v $\mathbb{Q}[x]$ pro a) $n = 7$, b) $n = 12$.

11. Spočtěte osmý cyklotomický polynom a výpočtem ukažte, že je ireducibilní.

12. Dokažte, že $t_{p^k}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^{ip^{k-1}}$ pro každé prvočíslo p a $k \in \mathbb{N}$.

13. Dokažte, že $t_{2n}(-x) = t_n(x)$ pro každé liché $n > 1$.

Úlohy s nekladným číslem budou předvedeny na cvičení jako vzorové.
Úlohy s ! je doporučeno řešit přednostně.
Úlohy s ∗ jsou náročnější.