SAMOOPRAVNÉ KÓDY

Obsah

Motivace a obsah 2

Základní koncepty 3

1. Najít a opravit! 3
2. S linearitou je lépe 5

Algebraické konstrukce 8

3. Co všechno přežijí MDS-kódy 8
4. A co už ani MDS-kódy nepřežijí 10
5. Polynomy nad konečnými tělesy 12
6. Cyklické kódy 15
7. GRS kódy a jejich ostatky 18

Kombinatorické konstrukce 21

8. Reedovy-Mullerovy kódy 21
9. Golayovy perfektní kódy 24

Konvoluční kódy 31

10. Kódujme konvolučním kódem! 31
11. Konvoluční kódovač: obvod nebo překladač? 34
12. Polynomiální generující matice 38
13. Viterbiho dekódování 42

Date: 6. října 2025.

Děkuji Dominiku Stejskalovi za upozornění na chyby a Adamu Klepáčovi za šablonu obvodu.

Motivace a obsah

Objektem našeho zájmu bude jeden, z hlediska praktického použití zásadní aspekt matematického modelu otázky, jak rychle a bez ztrát přenést informaci, jímž je kocept matematické struktury, které umožní realizaci modelu v konkrétní fyzikální situaci. Model přenosu můžeme popsat jednoduchým schématem:

$$\text{informační zdroj} \quad \xrightarrow{\text{kódování}} \quad \text{kód} \quad \xrightarrow{\text{kanál}} \quad \text{dekódování}$$

Informaci v tomto modelu chápeme jako náhodnou veličinu výběru zprávy z množiny všech možných zpráv, podobně můžeme jazykem teorie pravděpodobnosti popsat informační kanál, v němž s jistou pravděpodobností může dojít k chybě, tedy přijetí jiné než vyslané zprávy (přirozené je kvantifikovat pravděpodobnost přijetí všech možných zpráv za předpokladu vyslání každé možné zakódované zprávy, tedy pomocí podmíněné pravděpodobnosti). Pravděpodobnostní stránkou modelu a kvantifikací teoretických mezí úspěšnosti přenosu se zabývá teorie informace. Pro porozumění přístupu teorie samoopravných kódů si stačí z teorie informace vzít pouze fakt, že neexistuje žádná teoreticky lepší metoda dekódování než hledání bitově nejbliží kódové zprávy k té, která byla přijata. V naší přednášce se tedy omezíme na zkoumání konkrétních matematických struktur, konkrétně tříd kódů, vhodného kódování a (z časových důvodů v omezené míře) algoritmicky efektivním postupem dekódování metodou nejbližšího slova. Je smutným faktem, že přes silné výsledky teorie informace, které lze shrnout do sloganu *náhodný kód je asymptoticky dobrý*, je asymptotické chování konstrukcí takzvaných blokových kódů, jimž se budeme věnovat větší část semestru velmi špatné, tedy, že informační poměr počtu informačních bitů vzhledem k délce (tedy podíl logaritmu počtu kódových slov k logaritmu počtu všech slov) se pro rostoucí délku bloků blíží limitně k nule. To ovšem nemění nic na faktu, že pro omezené délky jsou prezentované algebraické a kombinatorické konstrukce kódů aplikačně a občas i teoreticky významné. Na závěr kurzu naštěstí nastíníme základy teorie konvolučních kódů, jejichž využití v konstrukci takzvaných turbokódů už se Shannonově teoretické mezi využití kapacity kanálu už úspěšně přibližuje.

Rozvrh přednášky:

(1) základní koncepty teorie kódů (vzdálenost, nosnost, linearita, dualita),
(2) algebraické konstrukce (konečná tělesa a polynomy nad nimi, cyklické, RS, GRS a reziduální kódy),
(3) kombinatorické a geometrické konstrukce (Golayovy kódy, RM kódy),
(4) úvod do konvolučních kódů.

Základní koncepty

1. Najít a opravit!

Nejprve zavedeme pojmy délky a vzdálenosti kódu, které nám umožní korektně pracovat s konceptem nalezení a opravení chyby přijatého slova. Hlavním výsledkem sekce budou dva vztahy (Hammingův a Singletonův) ozřejmující pro danou délku kódu protiklad schopnosti opravit chybu a velikosti.

Celou přednášku předpokládáme, že $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}$ je abeceda znaků zdroje i příjemce pro $\mathbb{F}$ konečné těleso řádu $q = |\mathbb{F}|$, n bude vždy přirozené číslo.

T&N. Aritmetický vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ budeme nazývat *slovo* délky n a v souřadnicích ho budeme zapisovat řádkově $\mathbf{v} = v_1 v_2 \dots v_n$.
Množina $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *blokový kód délky* n a jednoprvkový kód budeme nazývat *triviálním* kódem, zatímco kód $\mathcal{C} = \mathbb{F}^n$ *totálním* kódem.

Definice. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je neprázdná množina slov. Pak
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\{i \mid u_i \neq v_i\}|$ se nazývá *(Hammingova) vzdálenost* slov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
- položme $d(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$ pro $|\mathcal{C}| > 1$ a $d(\mathcal{C}) = n+1$ pro $|\mathcal{C}| = 1$, pak $d(\mathcal{C})$ nazveme *(Hammingova) vzdálenost* kódu $\mathcal{C}$,
- $w(\mathbf{u}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ se nazývá *(Hammingova) váha* slova $\mathbf{u}$.

Poznámka 1.1. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ pak
(1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$
(2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = w(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

Důkaz. (1) Označme $D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{i \mid u_i \neq v_i\}$, pak
$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$
proto
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |D(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$
(2) Stačí uvážit, že $u_i \neq v_i \Leftrightarrow u_i - v_i \neq 0$. □

T&N. Jestliže $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$, $M \subseteq \mathbb{F}_q^n$ a r je nezáporné celé číslo, pak
$$S(\mathbf{u}, r) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq r\}$$
je q-ární koule o poloměru r se středem $\mathbf{u}$ a dále značíme $V_q(n, r) = |S(\mathbf{0}, r)|$ a $\mathbf{u} + M = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n\}$.

Pozorování. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $r \in \mathbb{N}$ pak
(1) $S(\mathbf{u}, r) = \mathbf{u} + S(\mathbf{0}, r) = \mathbf{u} - \mathbf{v} + S(\mathbf{v}, r)$,
(2) $V_q(n, r) = |S(\mathbf{u}, r)| = |S(\mathbf{v}, r)|$.

T&N. Je-li r nezáporné celé číslo, pak o kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ řekneme, že
- *rozpozná* r chyb, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$,
- *opraví* r chyb, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r) = \emptyset$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Pozorování. Pokud kód $\mathcal{C}$ opraví r chyb, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v} \in S(\mathbf{u}, r)$, pak $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$.

Předchozí úvaha vede k opravovacímu algoritmu metodou nejbližšího slova: je-li $\mathbf{v}$ přijaté slovo, zvolíme takové $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pro něž $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$. Je-li pravděpodobnost bezchybného příjetí (q-árního) bitu větší než pravděpodobnost bitové chyby, víme z teorie informace, že se jedná o ML dekódovací schéma.

Poznámka 1.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód a $r \in \mathbb{N}$ pak

(1) $\mathcal{C}$ rozpozná r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > r$,
(2) $\mathcal{C}$ opraví r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > 2r$,

Důkaz. (1) $d(\mathcal{C}) > r \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ platí, že $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > r$, tudíž $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C} : S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$.

(2) Dokážeme nepřímo.

($\Rightarrow$) Nechť $d \leq 2r$. Pak $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ splňující $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 2r \Rightarrow$ pro $D := \{i \mid u_i \neq v_i\}$ dostáváme $|D| \leq 2r \Rightarrow \exists B \subset D$, pro něž $|B| \leq r$ a $|D \setminus B| \leq r$. Definujme slovo $\mathbf{w}$:

$$w_i = \begin{cases} u_i & \text{pro } i \in B \\ v_i & \text{pro } i \in D \setminus B \\ u_i = v_i & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq r$ a $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq r$, proto $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$.

($\Leftarrow$) Nechť $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ splňující $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$. Pak

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq 2r$$

díky 1.1(1). □

Věta 1.3 (Hammingova nerovnost)**.** Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód, který opraví r chyb. Pak $2r < d(\mathcal{C})$ a pro $k = \log_q |\mathcal{C}|$ platí, že $V_q(n, r) \leq q^{n-k}$.

Důkaz. Z 1.2 plyne, že $2r < d(\mathcal{C})$, proto je $\{S(\mathbf{u}, r) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ disjunktní systém podmnožin $\mathbb{F}^n$. Nyní stačí přepočítat prvky jednotlivých množin:

$$V_q(n, r)|\mathcal{C}| = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} |S(\mathbf{u}, r)| = |\dot{\bigcup}_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r)| \leq |\mathbb{F}^n| = q^n.$$

Protože $|\mathcal{C}| = q^k$, dostáváme $V_q(n, r) \leq \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$. □

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a r je nezáporné celé číslo. Číslo $\frac{k}{n}$ se nazývá *nosnost* (nebo také informační poměr) kódu

Kód $\mathcal{C}$ je r-*perfektní*, jestliže opraví r chyb a $V_q(n, r) = q^{n-k}$, $\mathcal{C}$ je *perfektní*, jestliže existuje r, pro něž je r-perfektní.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je netriviální kód, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a r je nezáporné celé číslo.

(1) $\frac{k}{n} \in (0, 1\rangle$ a $k = n$, právě když $\mathcal{C} = \mathbb{F}_q^n$,
(2) $\mathcal{C}$ je r-perfektní, právě když $\mathbb{F}_q^n = \dot{\bigcup}_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r)$,
(3) je-li $\mathcal{C}$ perfektní kód, je r-perfektní pro jediné $r = \frac{d(\mathcal{C})-1}{2}$, a je $d(\mathcal{C})$ nutně liché.

Věta 1.4 (Singletonův odhad)**.** Jestliže $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ je kód a $k = \log_q |\mathcal{C}|$, pak $d(\mathcal{C}) \leq n-k+1$.

Důkaz. Pro triviální kód je $k = 0$ a tvrzení tak zřejmě platí. Položme nyní $A(n, d) := \max\{\log_q |\mathcal{C}| \mid \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n, d(\mathcal{C}) \geq d\}$. Pak pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d = d(\mathcal{C})$ platí, že $k \leq A(n, d)$.

Dokazujme indukcí dle $d \geq 1$ tvrzení $\forall n\ A(n,d) \leq n-d+1$.

Protože vzdálenost jedna má totální kód $\mathbb{F}_q^n$, dostáváme $A(n,1) = n = n-1+1$, vidíme, že tvrzení pro $d=1$ a každé n platí.

Za platnosti tvrzení pro $d-1$ dokážeme tvrzení pro $d \geq 2$. Pro libovolný kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d(\mathcal{C}) \geq d$ sestrojíme kód

$$\overline{\mathcal{C}} := \{v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{F}_q^{n-1} \mid \exists v_n :\ v_1 \dots v_{n-1} v_n \in \mathcal{C}\}.$$

Pak $|\overline{\mathcal{C}}| = |\mathcal{C}|$ protože $d \geq 2$ a dále $d(\overline{\mathcal{C}}) \geq d-1$, proto díky indukčnímu předpokladu dostáváme, že

$$A(n,d) \leq A(n-1,d-1) \leq (n-1)-(d-1)+1 = n-d+1.$$

Protože $k \leq A(n, d(\mathcal{C})) \leq n - d(\mathcal{C}) + 1$, vidíme, že $d(\mathcal{C}) \leq n-k+1$. $\square$

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a $d = d(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}$ se nazývá *MDS* (maximum distance separable), jestliže $d = n-k+1$.

Příklad 1.5. (1) Totální kód $\mathbb{F}^n$ má vzdálenost 1, neopraví tudíž žádnou chybu a představuje zcela nezajímavý kód, byť je 0-perfektní i MDS.

(2) Dvouprvkový binární kód $\{\mathbf{0}, 11\dots1\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ má vzdálenost n, jedná se tedy o MDS kód, který je pro n liché i perfektní, neboť opraví právě $\frac{n-1}{2}$ chyb a $\mathbb{F}_2^n = S(\mathbf{0}, \frac{n-1}{2}) \cup S(11\dots1, \frac{n-1}{2})$. V případě, že je n sudé o perfektní kód se podle předchozího pozorování jistě nejedná.

(3) Pro $n \geq 2$ je tzv. paritní kód $\mathcal{C} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_i v_i = 0\}$ MDS, neboť $d(\mathcal{C}) = 2$ a $k = n-1$, který není perfektní.

2. S linearitou je lépe

V této kapitole si uvědomíme, že lineární kódy umožňují snadné kódování i testování, zda je přijaté slovo kódové, díky generující a kontrolní matici. Pouhá záměna generující a kontrolní matice ozřejmí velmi užitečný koncept dualizace kódu.

Definice. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *lineární kód*, jde-li o podprostor vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ nad tělesem $\mathbb{F}$.

T&N. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ lineární kód délky n nad tělesem $\mathbb{F}_q$, $k = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$ a $d = d(\mathcal{C})$, pak ho v závislosti na tom, které z hodnot známe, označujeme jako kód s parametry

$$[n,k],\ [n,k,d],\ [n,k]_q,\ [n,k,d]_q.$$

Pozorování. Jestliže je $\mathcal{C}$ kód s parametry $[n,k,d]_q$, pak

(1) $k = \log_q |\mathcal{C}| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$, a proto je nosnost $\mathcal{C}$ rovna $\frac{k}{n}$,
(2) $d(\mathcal{C}) = \min\{w(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, protože pro všechna kódová slova $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ platí, že $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ a $w(\mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ a naopak $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{C}$ a $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = w(\mathbf{v} - \mathbf{w})$.

T&N. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k]$-kód a $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k)\times n}$, pak $\mathbf{G}$ je *generující matice* kódu $\mathcal{C}$, jestliže $c_1, \dots, c_k$ je báze $\mathcal{C}$, a $\mathbf{H}$ *kontrolní matice* kódu $\mathcal{C}$, pokud $\mathcal{C} = \operatorname{Ker} \mathbf{H}$. Řekneme , že je generující matice lineárního kódu ve *standardním tvaru*, má-li formu $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k\times n}$.

Pozorování. Nechť $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k)\times n}$ a $\mathcal{C}$ je $[n,k]$-kód.

(1) Buď $\mathbf{G}$ generující matice $\mathcal{C}$. Pak $\mathbf{H}$ je kontrolní matice kódu $\mathcal{C}$, právě když řádky $\mathbf{H}$ tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{G}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$.
(2) Buď $\mathbf{H}$ kontrolní matice $\mathcal{C}$. Pak $\mathbf{G}$ je generující matice kódu $\mathcal{C}$, právě když řádky $\mathbf{G}$ tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{H}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$
(3) $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ jsou generující a kontrolní matice kódu $\mathcal{C}$, právě když rank $\mathbf{G} = k$, rank $\mathbf{H} = n-k$, $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ a $\mathcal{C} = \operatorname{Im} \mathbf{G}^T = \operatorname{Ker} \mathbf{H}$.

Uvědomíme si, že generující matice ve standardním tvaru nám umožňuje velmi snadno popsat kontrolní matici.

Poznámka 2.1. Je-li $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k\times n}$ generující matice $[n,k]$-kódu, pak $(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k})$ je jeho kontrolní matice.

Důkaz. Využijeme třetí bod pozorování ze začátku sekce, které říká, že stačí spočítat $\operatorname{rank}((-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k})) = n-k$ a ověřit nulovost součinu

$$(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k}) \cdot (\mathbf{I}_k|\mathbf{A})^T = \left(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T = \mathbf{0},$$

kde jsme využili znalosti počítání s blokovými maticemi. □

T&N. Pro (blokové) kódy $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ a permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\mathcal{C} \sim_\sigma \overline{\mathcal{C}}$, pokud $c_1 \dots c_n \in \mathcal{C} \Leftrightarrow c_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(n)} \in \overline{\mathcal{C}}$. Řekneme, že jsou kódy $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ *permutačně ekvivalentní* (prostřednictvím permutace σ) jestliže existuje $\sigma \in S_n$, pro niž $\mathcal{C} \sim_\sigma \overline{\mathcal{C}}$.

Pozorování. Nechť $\sigma \in S_n$, kódy $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ jsou permutačně ekvivalentní prostřednictvím σ a definujme $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ předpisem $\varphi_\sigma(v) = v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)}$. Pak

(1) $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je izomorfismus vektorových prostorů, $\overline{\mathcal{C}} = \varphi_\sigma(\mathcal{C})$ a $|\mathcal{C}| = |\overline{\mathcal{C}}|$,
(2) $\mathcal{C}$ je lineární právě když je $\overline{\mathcal{C}}$ lineární,
(3) pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ máme $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\varphi_\sigma(\mathbf{u}), \varphi_\sigma(\mathbf{v}))$ a proto $d(\mathcal{C}) = d(\overline{\mathcal{C}})$,
(4) permutační ekvivalence tvoří ekvivalenci na kódech obsažených v $\mathbb{F}^n$, která zachovává vzdálenost i velikost kódu.

Následující tvrzení nám říká, že až na pořadí souřadnic lze každý lineární kód popsat pomocí generující matice ve standardním tvaru.

Poznámka 2.2. Je-li $\mathcal{C}$ lineární kód, pak existuje generující matice ve standardním tvaru nějakého kódu, který je permutačně ekvivalentní k $\mathcal{C}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{G}$ je generující matice $[n,k]$-kódu $\mathcal{C}$. Posloupností elementárních úprav (obvykle nazývanou Gaussova-Jordanova eliminace) najdeme řádkově ekvivalentní, tedy rovněž generující odstupňovanou matici $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1^T | \dots | \mathbf{d}_n^T) \sim \mathbf{G}$ s bázovými sloupci $\mathbf{d}_{i_1}^T = \mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{d}_{i_k}^T = \mathbf{e}_k^T$ tvořící kanonickou bázi prostoru $\mathbb{F}^k$. Vezmeme-li libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ splňující $\sigma(j) = i_j$, pak dostáváme generující matici

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{d}_{\sigma(1)}^T | \mathbf{d}_{\sigma(2)}^T | \dots \mathbf{d}_{\sigma(k)}^T \dots | \mathbf{d}_{\sigma(n)}^T) = (\mathbf{I}_k | \mathbf{d}_{\sigma(k+1)}^T \dots | \mathbf{d}_{\sigma(n)}^T),$$

kódu $\overline{\mathcal{C}}$ permutačně ekvivalentního $\mathcal{C}$, konkrétně platí, že $\mathcal{C} \sim_\sigma \overline{\mathcal{C}}$. □

Pozorování. Nechť $\mathbf{G}$ je generující a $\mathbf{H}$ kontrolní matice $[n, k]$-kódu $\mathcal{C}$ a definujme zobrazení $c : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ předpisem $c(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{G}$.

(1) c je prosté lineární zobrazení a $\mathcal{C} = c(\mathbb{F}^k)$,
(2) je-li $\mathbf{G}$ generující matice ve standardním tvaru, pak $c(\mathbf{v}) = (\mathbf{I}_k | \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} | \mathbf{v}A)$,
(3) opraví-li $\mathcal{C}$ r chyb a $E_r = \{\mathbf{e}\mathbf{H}^T \mid \mathbf{e} \in S(\mathbf{0}, r)\}$, pak pro každé $\mathbf{v} \in E_r$ existuje jediné $\mathbf{e} \in S(\mathbf{0}, r)$ pro něž $\mathbf{e}\mathbf{H}^T = \mathbf{v}$. , a pokud $\mathbf{u}\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\mathbf{H}^T$, pak $\mathbf{u} - \mathbf{e} \in \mathcal{C}$.

Zobrazení c z bodu (1) je prosté (dokonce prefixové) *kódování* zdroje $\mathbb{F}^k$ a kódování maticí ve standardním tvaru z bodu (2) se říká *systematické* kódování. Hodnota $\mathbf{u}\mathbf{H}^T$ využívaná v bodu (3) se obvykle nazývá *syndrom* slova $\mathbf{u}$ a nalezení chyby ze syndromu pomocí vhodného algoritmu bývá klíčové pro efektivní dekódování.

Věta 2.3. Je-li $\mathcal{C}$ $[n, k, d]$-kód s kontrolní maticí $\mathbf{H}$ a r je největší hodnota, pro niž je každých r sloupců $\mathbf{H}$ lineárně nezávislých, pak $d = r + 1$.

Důkaz. Nejprve uvážíme, že $r = 0$, právě když existuje i, pro něž je i-tý sloupec $\mathbf{H}$ nulový, což je ekvivalentní podmínce, že existuje i, pro které $\mathbf{H}\mathbf{e}_i^T = \mathbf{0}^T$ a to nastává právě tehdy, když existuje i, pro které $\mathbf{e}_i \in \mathcal{C}$. Protože je poslední podmínka ekvivalentní tomu, že $d(\mathcal{C}) = 1$, máme tvrzení pro $r = 0$ dokázané.

Nyní si všimněme, že $r = n$, právě když $\mathbf{H}$ je regulární čtvercová matice, což nastává, právě když $d(\mathcal{C}) = d(\{\mathbf{0}\}) = n + 1$.

Konečně nechť $0 < r < n$ a $d(\mathcal{C}) = d$. Potom existuje $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pro které $w(\mathbf{u}) = d$, tedy $\mathbf{H}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T$, z čehož plyne, že máme d lineárně závislých sloupců matice $\mathbf{H}$. Odtud vidíme, že $r \le d - 1$. Naopak z maximality r plyne, že $\exists \mathbf{v}$, pro které $w(\mathbf{v}) = r + 1$ a $\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0}^T$. To znamená, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a $d \le w(\mathbf{v}) = r + 1$, čímž jsme ověřili, že $d = r + 1$. □

Nyní sestrojíme perfektní lineární kód, který není MDS.

Příklad 2.4 (Hammingův perfektní kód délky 7)**.** Definujme binární kód $\mathcal{H}$ s kontrolní maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Spočítáme $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ generující matici ve standardním tvaru, všimněme si, že jsou ve sloupcích v binárním zápisu umístěny hodnoty 1 až 7. Protože jsou tudíž každé dva sloupce $\mathbf{H}$ různé, jsou nad $\mathbb{F}_2$ lineárně nezávislé. Naopak, například první tři sloupce $\mathbf{H}$ už jsou lineárně závislé, proto podle věty 2.3 platí, že $d(\mathcal{H}) = 3$, a kód podle poznámky 1.2 opraví právě jednu chybu. Snadno spočítáme

$$V_2(7, 1) = 1 + \binom{7}{1} = 8 = 2^{7-4},$$

tedy se jedná o 1-perfektní kód, který ovšem není MDS, neboť $3 < 7 - 4 + 1$.

3. Co všechno přežijí MDS-kódy

V této kapitole si povšimneme elementárních vlastností třídy snadno konstruovatelných lineárních kódů, které jsou nejlepší možné z hlediska Singletonova odhadu. Nejprve zavedeme obecný koncept duálního kódu a ověříme, že je třída MDS kódů na dualizaci uzavřena. Dále ukážeme, že i výsledkem propíchnutí MDS kódu v omezeném počtu souřadnic je opět MDS kód.

T&N. Bilineární formě $\cdot$ na vektorovém prostoru $\mathbb{F}^n$ nad tělesem $\mathbb{F}$ dané vztahem $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ budeme říkat *bodový součin.* Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je kód. Pak $\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{d} \in \mathcal{C}\}$ nazývá *duální kód* ke kódu $\mathcal{C}$. Kód $\mathcal{C}$ se nazývá *samoortogonální*, pokud $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^\perp$ a $\mathcal{C}$ je *samoduální*, pokud $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{F}^n$.

(1) bodový součin $\cdot$ je regulární symetrická bilineární forma,
(2) $\mathcal{C}^\perp = (\mathrm{LO}\ \mathcal{C})^\perp$ je lineární kód, tedy samoduální kód je vždy lineární
(3) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{LO}\ \mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$ a je-li $\mathcal{C}$ lineární, pak $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$,
(4) pokud $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, pak $\mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{C}^\perp$.

Poznámka 3.1. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k]$-kód, $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k)\times n}$.

(1) $\mathcal{C}^\perp$ je $[n, n-k]$-kód,
(2) $\mathbf{G}$ je generující matice $\mathcal{C}$, právě když je $\mathbf{G}$ kontrolní matice $\mathcal{C}^\perp$,
(3) $\mathbf{H}$ je generující matice $\mathcal{C}^\perp$, právě když je $\mathbf{H}$ kontrolní matice $\mathcal{C}$,
(4) je-li $\mathbf{G}$ je generující matice, pak
  (a) $\mathcal{C}$ je samoduální, právě když $\mathbf{G}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}$.
  (b) $\mathcal{C}$ je samoortogonální, právě když $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$,

Důkaz. (1) Je-li $\mathbf{G}$ generující matice $\mathcal{C}$ a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k$ její řádky, potom díky Pozorování $\mathcal{C}^\perp = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)^\perp = \mathrm{Ker}\ \mathbf{G}$, a proto $\dim \mathcal{C}^\perp = n - \mathrm{rank}\ \mathbf{G} = n - k$, jak víme z lineární algebry.

(2) Všimneme si, že $\mathbf{G}$ je generující matice právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\ \mathbf{G} = \mathcal{C}^\perp$, což je ekvivalentní tomu, že $\mathbf{G}$ kontrolní matice $\mathcal{C}^\perp$.

(3) Protože $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$, je podle (2) je $\mathbf{H}$ generující matice $\mathcal{C}^\perp$, právě když je $\mathbf{H}$ kontrolní matice $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$.

(4) Platnost (a) plyne okamžitě z (2), (b) je snadné. □

Připomeňme, že pro $[n,k,d]$-kód vždy platí $d \le n - k + 1$ a tento kód je MDS, právě když $d = n - k + 1$. Začneme formulací důsledku věty 2.3.

Poznámka 3.2. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k,d]$-kód s kontrolní maticí $\mathbf{H}$. Pak je ekvivalentní:

(1) $\mathcal{C}$ je MDS,
(2) každých $n-k$ sloupců $\mathbf{H}$ je lineárně nezávislých,
(3) každá čtvercová matice, která vznikne z $\mathbf{H}$ vypuštěním k sloupců je regulární.

Důkaz. (1)⇒(2) $\mathcal{C}$ je MDS znamená, že $d - 1 = n - k$, proto (2) plyne z 2.3.

(2)⇒(1) Z 1.4 plyne, že $d \le n - k + 1$ a z 2.3 plyne, že $d \ge n - k + 1$, proto je $\mathcal{C}$ MDS.

(2)⇔(3) To, že je čtvercová matice regulární, právě když jsou její sloupce lineárně nezávislé, víme z lineární algebry. □

Poznamenejme, že použijeme-li 3.1 na předchozí tvrzení, dostáváme pro $[n,k]$-kód s generující maticí $\mathbf{G}$, že je jeho duál MDS, právě když každá čtvercová matice, která vznikne z $\mathbf{G}$ vypuštěním $n-k$ sloupců, je regulární.

Věta 3.3. Lineární kód $\mathcal{C}$ je MDS, právě když $\mathcal{C}^\perp$ je MDS.

Důkaz. Protože $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$, stačí dokázat (například) jen zpětnou implikaci, platí-li totiž zpětná implikace, pak přímou obdržíme jejím použitím na duální kód $\mathcal{C}^\perp$.

Zpětnou implikaci dokažme nepřímo, tedy budeme předpokládat, že $\mathcal{C}$ je $[n,k,d]$-kód, který není MDS. Pak $d < n-k+1$, tudíž $d \le n-k$. Protože existuje $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tak, že $0 < w(\mathbf{v}) \le n-k$, vidíme, že $|\{i \mid v_i = 0\}| = n - w(\mathbf{v}) \ge k$. Z lineární algebry víme, že existuje báze $\mathcal{C}$ obsahující vektor $\mathbf{v}$, a proto existuje generující matice $\mathbf{G}$, jejíž první řádek tvoří slovo $\mathbf{v}$. Podle 3.1 je $\mathbf{G}$ kontrolní maticí kódu $\mathcal{C}^\perp$, jejíž alespoň k sloupců má první souřadnici nulovou. Uvážíme-li tedy čtvercovou matici tvořenou k takovými sloupci, je její první řádek nulový a tudíž se jedná o singulární matici. Z poznámky 3.2 potom plyne, že $\mathcal{C}^\perp$ není MDS. □

Díky 3.1 tedy můžeme testovat to, zda je kód MDS i pomocí jeho generující matice:

Důsledek 3.4. Buď $\mathbf{G}$ generující matice $[n,k]$-kódu $\mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}$ je MDS (tedy $[n,k,n-k+1]$-kód), právě když je každých k sloupců $\mathbf{G}$ lineárně nezávislých.

Nyní zavedeme ještě jedno přirozené lineární zobrazení kódů, o němž předchozí důsledek ukáže, že zachovává vlastnost kódu být MDS.

T&N. Nechť $r \in \mathbb{N}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ a $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Označme $\pi_I : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^{n-r}$ zobrazení, kde $\pi_I(\mathbf{u})$ vznikne z $\mathbf{u}$ vynecháním všech souřadnic $i_1, \ldots, i_r$ a $\pi_i = \pi_{\{i\}}$. Zobrazení π_I se nazývá *propíchnutí* a $\pi_I(\mathcal{C})$ je pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ *propíchnutý* kód v souřadnicích I.

Pozorování. Pro r přirozené, $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ platí:

(1) $\pi_I = \pi_{i_1} \ldots \pi_{i_r}$ je lineární zobrazení,
(2) propíchnutý kód lineárního kódu je lineární,
(3) je-li $\mathcal{C}$ $[n,k,d]$-kód pro $d > 1$, pak $\pi_i(\mathcal{C})$ je buď $[n-1,k,d]$-kód nebo $[n-1,k,d-1]$-kód.

Důsledek 3.5. Buď $\mathcal{C}$ MDS $[n,k,n-k+1]$-kód a nechť platí, že $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ a $r = |I| \le n-k$. Pak $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS $[n-r,k,n-r-k+1]$-kód.

Důkaz. Nechť $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice kódu $\mathcal{C}$. Pak je $G_I = \begin{pmatrix} \pi_I(\mathbf{c}_1) \\ \ldots \\ \pi_I(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}$ generující matice kódu $\pi_I(\mathcal{C})$, neboť $r = |I| \le n-k$, $k \le n-r$ a matice G_I má tudíž hodnost rovnou k. Potom z 3.4 plyne, že každých k sloupců G, a tudíž i G_I je lineárně nezávislých. Naopak obrácená implikace důsledku 3.4 nám říká, že je kód $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS. □

Příklad 3.6. Je-li $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ generující matice $[8,4]_2$-kódu $\mathcal{C}$ ve standardním tvaru, vidíme, že $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$, jde o samoduální kód. Protože žádný sloupec matice $\mathbf{G}$ není nulový, každé dva jsou různé, součet každých tří má lichou váhu, tedy není nula a součet prvních tří sloupců dá právě poslední sloupec, plyne z 2.3, že $d(\mathcal{C}) = 4$, proto je $\mathcal{C}$ $[8,4,4]_2$-kód.

Všimněme si, že propíchnutí $\pi_8(\mathcal{C})$ je právě Hammingův 1-perfektní $[7,4,3]_2$-kód z 2.4 s generující maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Uveďme na závěr univerzální konstrukci MDS kódu, jíž se budeme podrobněji zabývat v 7. sekci.

Příklad 3.7. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q^*$ jsou po dvou různé prvky, $k < n$, položme $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dále $\mathbf{H}_{k,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_n^{k-1} \end{pmatrix}$ a $\mathcal{C}_{k,\alpha} = \ker \mathbf{H}_{k,\alpha}$. Potom tvoří každých k sloupců této matice regulární matici a proto jsou $\mathcal{C}_{k,\alpha}$ i $\mathcal{C}_{k,\alpha}^{\perp}$ MDS-kódy.

4. A co už ani MDS-kódy nepřežijí

Tentokrát si pro MDS kódy rozmyslíme, že vzdálenost použitelných konstrukcí je shora omezena řádem tělesa, což se ukazuje jako velmi nepříjmené omezení pro existenci MDS kódů nad malými tělesy. Proto zavedeme pojem reziduálního kódu, který nám umožní některé vlastnosti MDS kódů vybudovaných nad velkým tělesem převést do kódů nad jejich podtělesy.

Kapitolu zahájíme důkazem tvrzení, které ozřejmí vztah mezi existencí lineárních MDS-kódů a velikostí tělesa $\mathbb{F}$. Ukazuje se, že předpoklad konstrukce příkladu 3.7 na dostatečnou velikost použitého tělesa nebyl náhodný. Nejprve ovšem vyslovíme drobné lineárně algebraické pozorování.

Pozorování. Nechť $0 < i < j \le k$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$, $b_i \neq 0 \neq b_j$, Jestliže $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$, pak je množina vektorů $\{\mathbf{e}_s \in \mathbb{F}^k \mid s : i \neq s \neq j\} \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ lineárně závislá, neboť se jedná o řádkové vektory matice $\mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, kterou dostaneme z jednotkové nahrazením i-tého řádku slovem $\mathbf{a}$ a j-tého řádku slovem $\mathbf{b}$ a jejíž determinant je $\det \mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = a_i b_j - a_j b_i = 0$.

Věta 4.1. Jestliže je $[n,k,d]_q$-kód MDS a $3 \le d \le n-1$, pak $n - q < k < q$ a $d \le q$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je $[n,k,d]_q$-kód, který je MDS, tedy $d = n-k+1$. Pak podle 3.3 je duální kód $\mathcal{C}^{\perp}$ MDS $[n, n-k, d']_q$, kde

$$d' = n - (n-k) + 1 = k + 1 = n - d + 2,$$

což také znamená, že $d = n - d' + 2$. Dosadíme-li vyjádření d do předpokladu $3 \leq d \leq n-1$ dostáváme nerovnosti

$$3 \leq n - d' + 2 \leq n - 1,$$

které upravíme odečtením $n + 2$ na

$$1 - n \leq -d' \leq -3$$

a následně přenásobením hodnotou -1 na

$$3 \leq d' \leq n - 1.$$

Ověřili jsme, že pro d i d' platí stejné předpoklady a dokázané tvrzení pro kód $\mathcal{C}$ bude platit i pro duální kód $\mathcal{C}^{\perp}$, který je podle 3.3 rovněž MDS-kód.

Protože parametry kódu nezávisí na pořadí souřadnic, můžeme díky 2.2 bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje generující matice kódu $\mathcal{C}$ ve standardním tvaru $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{F}_q^{k \times n-k}$. Protože $d \geq 3$, máme $n - k = d - 1 \geq 2$, tedy $\mathbf{A}$ má aspoň dva sloupce.

Uvědomme si, že všechny hodnoty $\mathbf{A}$ jsou nenulové. Kdyby $a_{ij} = 0$, pak by j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ byl lineární kombinací prvních k sloupců matice $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A})$ s výjimkou i-tého, což je ve sporu s 3.4. Protože jsou podle 3.4 první dva sloupce matice $\mathbf{A}$ a každých $k - 2$ sloupců jednotkové matice lineárně nezávislé, plyne z předchozího pozorování, že $\forall i \neq j$ $\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \neq \frac{a_{j1}}{a_{j2}}$, tedy

$$k = |\{\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \in \mathbb{F}_q^* \mid i = 1, \dots, k\}| \leq |\mathbb{F}_q^*| \leq q - 1.$$

Odtud okamžitě dostáváme nerovnost $k < q$ a duálně pro MDS kód $\mathcal{C}^{\perp}$ máme $n - k < q$, a proto $k > n - q$. Z předposlední nerovnosti konečně plyne $d = n + 1 - k \leq q$. $\square$

Příklad 4.2. Dvouprvkový kód $\{\mathbf{0}, 1 \dots 1\}$ je pro $k \geq 1$ a $n > 2$ jediný binární lineární kód s parametry $[n, k, n - k + 1]_2$, který opraví 1 chybu, tedy $d \geq 3$. Kdyby $d < n$, pak by z 4.1 plynulo, že $3 \leq d \leq q = 2$, tedy spor.

Nyní se podíváme na vztah vzdálenosti a dimenze reziduálních kódů vytvořených z MDS kódů.

Věta 4.3 (o kódech se zaručenou vzdáleností)**.** Je-li $\mathcal{C}$ $[n, l, D]_{q^r}$ kód, který je MDS, a $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je $[n, k, d]_q$ kód, pak $k \geq n - r(D - 1)$ a $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Důkaz. Protože je $\mathcal{C}$ MDS a proto platí, že $D = n - l + 1$, dostáváme rovnost $n - l = D - 1$. Dokážeme-li nerovnost $n - k \leq r(n - l)$, snadno z ní odvodíme obě nerovnosti $k \geq n - r(D - 1)$ i $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Všimněme si, že $n - k$ je právě počet řádků (libovolné) kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$ a zvolíme nějakou kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \dots \\ \mathbf{h}_{n-l} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{q^r}^{(n-l) \times n}$ kódu $\mathcal{C}$ s řádky $\mathbf{h}_i$. Označíme $\beta_1, \dots, \beta_r$ nějakou bázi $\mathbb{F}_{q^r}$ nad $\mathbb{F}_q$ a uvážíme, že existuje posloupnost vektorů $\mathbf{a}_{ji} \in \mathbb{F}_q^n$ pro všechna $i = 1, \dots, n - l$ a $j = 1, \dots, r$ splňující $\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{a}_{ji}$. Nyní definujme matice

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1i} \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{a}_{ri} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{r\times n} \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{(n-l)r\times n}.$$

Nyní platí, že $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$, právě když $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$. Zvolíme-li si tedy libovolné slovo $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$, pak $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$, právě když $\mathbf{u}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, což nastává, právě když $\mathbf{u}\tilde{\mathbf{H}}^T = \mathbf{0}$. Proto $\tilde{\mathcal{C}} = \mathrm{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$ a počet řádků kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$ je roven $\mathrm{rank}\,\tilde{\mathbf{H}} \le (n-l)r$, což je počet řádků $\tilde{\mathbf{H}}$. Dokázali jsme, že $n-k \le (n-l)r$. □

Příklad 4.4. Nechť $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, kde $\alpha\beta = 1 = \alpha + \beta$. Uvažujme reziduální binární kódy kvaternárních kódů dimenze 2. Všimli jsme si, že dimenze reziduálního kódu je shora omezena dimenzí původního kódu a nyní si uvědomíme, že nic víc o dimenzi binárního reziduálního kódu říci nemůžeme.

(1) $\mathrm{LO}(10\alpha0, 010\beta) \cap \mathbb{F}_2^4 = \{0000\}$ a reziduální kód má dimenzi 0,
(2) $\mathrm{LO}(10\alpha0, 01\beta0) \cap \mathbb{F}_2^4 = \mathrm{LO}(1110)$ a reziduální kód má dimenzi 1,
(3) $\mathrm{LO}(\beta\alpha1\beta, \alpha\beta1\alpha) \cap \mathbb{F}_2^4 = \mathrm{LO}(1101, 1011)$ a reziduální kód má dimenzi 2.

5. Polynomy nad konečnými tělesy

V této kapitole budeme aplikovat některé výsledky Galoisovy teorie na případ konečných těles. Především nás budou s ohledem na důležitou strukturu cyklických kódů, kterou se budeme zabývat v následující kapitole, zajímat ireducibilní rozklady polynomů $x^n - 1$. *Nejdůležitějším nástrojem pro tento úkol budou cyklotomické polynomy, o nichž dokážeme, že na rozdíl od celočíselných cyklotomických polynomů, důležitých v teorii čísel, nemusí být ireducibilní.*

$\mathbb{F}$ v celé kapitole značí konečné těleso (prvočíselné) charakteristiky p, čísla n a k jsou přirozená. Nejprve shrneme popis konečných těles, který jsme zčásti odvodili a zčásti připomněli na základě znalostí z přednášky Algebra. Ve loňské verzi skript z Algebry Davida Stanovského najdete uvedené výsledky v sekcích 24.2 a 16.2.

Fakt 5.1. Pro konečné těleso $\mathbb{F}$ (prvočíselné) charakteristiky p a přirozené číslo q platí:

(1) Těleso $\mathbb{F}$ řádu q existuje, právě když existuje n, pro něž $q = p^n$,
(2) jestliže $p^n = |\mathbb{F}|$ pak je $\mathbb{F}$ izomorfní rozkladovému nadtělesu polynomu polynomu $x^{p^n} - x$ nad $\mathbb{F}_p$ a $x^{p^n} - x = \prod_{a\in\mathbb{F}}(x-a)$,
(3) pro každé k existuje ireducibilní polynom m stupně k nad tělesem $\mathbb{F}_p$, a pro každý takový polynom platí, že $\mathbb{F}_p[x]/(m) \cong \mathbb{F}_{p^k}$ a že $m \mid x^{p^n} - x$,
(4) $\mathbb{F}_q^*$ je cyklická grupa a pro každé $k \mid (q-1)$ existuje jediná podgrupa $\mathbb{F}_q^*$ řádu k.

T&N. Až na izomorfismus jednoznačně určené těleso o p^n prvcích se značí $\mathbb{F}_{p^n}$ a obvykle se nazývá *Galoisovo* těleso řádu p^n. Zobrazení $f_{p^k} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ určená předpisem $f_{p^k}(a) = a^{p^k}$ budeme nazývat *Frobeniovy endomorfismy.*

Pozorování. Uvažujme-li $P = \langle 1 \rangle$ podgrupu $\mathbb{F}$ generovanou prvkem 1 a $U_k := \{t \in \mathbb{F} | \ f_{p^k}(t) = t\}$ pro k přirozené, platí:

(1) f_p je automorfismus a $f_{p^k} = f_{p^{k-1}} \circ f_p$,
(2) $P \subseteq U_k$ jsou podtělesa tělesa $\mathbb{F}$ a $U_1 = P \cong \mathbb{Z}_p$,
(3) f_{p^k} je U_k-automorfismus tělesa $\mathbb{F}$.

T&N. Podtělesu P tělesa $\mathbb{F}$ z Pozorování se říká *prvotěleso* tělesa $\mathbb{F}$.

Poznámka 5.2. Nechť p je prvočíslo, k, n, r přirozená čísla, $q = p^r$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $k \mid n$ v oboru $\mathbb{Z}$,
(2) $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$ v oboru $\mathbb{Z}$,
(3) $(q^k - 1) \mid (q^n - 1)$ v oboru $\mathbb{Z}$,
(4) $(x^{q^k} - x) \mid (x^{q^n} - x)$ v oboru $\mathbb{F}[x]$.

Důkaz. (1)⇒(2) Jestliže $n = kd$, snadno spočítáme, že $p^n - 1 = (p^k - 1)\sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}$.

(2)⇒(1) Nechť $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$ a $n = kd + r$, kde $0 \le r < k$. Víme, že

$$p^{kd} - 1 = (p^k - 1)\sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}, \quad \text{tedy} \quad (p^k - 1) \mid ((p^n - 1) - p^r(p^{kd} - 1)).$$

Protože $(p^n - 1) - p^r(p^{kd} - 1) = p^r - 1$, máme $(p^k - 1) \mid (p^r - 1)$. Ovšem $r < k$, proto $r = 0$.

(1)⇔(3) Stačí uvážit, že $k \mid n \Leftrightarrow rk \mid rn$ a to je dle dokázané ekvivalence ekvivalentní tvrzení $(q^k - 1) = (p^{rk} - 1) \mid (p^{rn} - 1) = (q^n - 1)$.

(3)⇒(4) Použijeme obdobný argument jako v důkazu (1)⇔(2), je-li totiž $(q^n - 1) = s(q^k - 1)$, pak $(x^{q^n} - x) = x(x^{q^k-1} - 1)\sum_{i=0}^{s-1} x^{i(q^k-1)}$, což dokazuje (4) za předpokladu, že platí (3)

(4)⇒(3) Obdobně, pokud $(x^{q^k-1} - 1) \mid (x^{q^n-1} - 1)$ a vydělíme-li se zbytkem $q^n - 1 = s(q^k - 1) + r$, pak i $(x^{q^k-1} - 1)$ dělí $(x^{q^n-1} - 1) - x^r(x^{s(q^k-1)} - 1) = x^r - 1$, odkud opět kvůli argumentu $r < q^k - 1$ dostáváme, že $r = 0$, a proto $(q^k - 1) \mid (q^n - 1)$. □

Poznámka 5.3. Nechť q je přirozené číslo. Pak existuje podtěleso tělesa $\mathbb{F}_{p^n}$ o q prvcích, právě když existuje $k \mid n$, pro které $q = p^k$. Podtěleso dané velikosti je určeno jednoznačně.

Důkaz. (⇒) Víme, že podtěleso U řádu q má charakteristiku p, proto podle 5.1(2) existuje $k \ge 1$, pro něž $q = p^k$. Z Lagrangeovy věty použité pro $U^* \le \mathbb{F}_{p^n}^*$ plyne, že $(p^k - 1) \mid (p^n - 1)$, tudíž $k \mid n$ díky 5.2.

(⇐) Podle 5.1(2) jsou všechny prvky $\mathbb{F}_{p^n}$ kořeny polynomu $x^{p^n} - x$ a $k \mid n$, tudíž podle 5.2 $(x^{p^k} - x) \mid (x^{p^n} - x)$ a $U_k = \{t \in \mathbb{F}_{p^n} \mid f_{p^k}(t) = t\}$ je podtěleso složené právě z p^k kořenů polynomu $x^{p^k} - x$. Tedy U_k je hledané podtěleso řádu p^k.

Jednoznačnost existence podtělesa řádu řádu p^k plyne za faktu 4.1(1), že nutně sestává právě ze všech kořenů polynomu $x^{p^k} - x$. □

Nyní si uvědomíme, že $x^{q^n} - x$ poskytuje všechny ireducibilní polynomy stupně n nad tělesem řádu q.

Věta 5.4. Je-li $m \in \mathbb{F}_q[x]$ ireducibilní polynom stupně k, pak m dělí $x^{q^n} - x$ právě tehdy, když k dělí n.

Důkaz. Poznamenejme, že existuje přirozené s, pro něž $q = p^s$, a že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je m monický polynom.

($\Rightarrow$) Protože m dělí $x^{q^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_{q^n}}(x - a)$, existuje díky díky 5.1(2) prvek $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, které je kořenem m, a protože je m ireducibilní monický polynom, jedná se právě minimální polynom prvku α nad tělesem $\mathbb{F}_q$. Proto

$$[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = \deg(m) = k,$$

tedy $|\mathbb{F}_q(\alpha)| = q^k = p^{ks}$. Podle 5.3 tak dostáváme, že $ks \mid ns$ a tudíž $k \mid n$.

($\Leftarrow$) Známá konstrukce nám říká, že $\mathbb{F}_q[x]/(m)$ tvoří kořenové nadtěleso polynomu m nad tělesem $\mathbb{F}_q$ řádu q^k. To je podle 5.1(3) izomorfní rozkladovému nadtělesu polynomu $x^{q^k} - x$ nad tělesem $\mathbb{F}_p$ a tudíž i nad tělesem $\mathbb{F}_q$, které je podle 5.3 obsaženo v $\mathbb{F}_{q^k}$. Protože existuje společný kořen $\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}$ polynomů m a $x^{q^k} - x$, je polynom m opět minimální polynom prvku α nad $\mathbb{F}_q$, a tedy platí, že $m \mid x^{q^k} - x$. Konečně díky 5.2 $(x^{q^k} - x) \mid (x^{q^n} - x)$, a proto $m \mid (x^{q^n} - x)$. $\square$

Protože neasociované ireducibilní faktory mají různé kořeny a $x^{q^n} - x$ má všechny kořeny jednoduché, plyne z předchozí věty důležité tvrzení:

Důsledek 5.5. Polynom $x^{q^n} - x$ je právě součinem všech monických ireducibilních polynomů stupně $k \mid n$ v oboru $\mathbb{F}_q[x]$.

T&N. Symbolem $\mathbb{F}_{(n)}$ budeme značit rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad tělesem $\mathbb{F}$ a $\mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$.

Pozorování. Nechť $k > 0$.

(1) $\mathbb{E}_{(n)}$ je podgrupa $\mathbb{F}^*_{(n)}$, tedy cyklická grupa,
(2) pokud p nedělí n, pak $x^n - 1$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě n jednoduchých kořenů, $|\mathbb{E}_{(n)}| = n$ a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}}(x - \alpha)$,
(3) pokud $n = p^k \cdot m$ a p nedělí m, pak $x^n - 1 = (x^m - 1)^{p^k}$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě m kořenů násobnosti p^k, $|\mathbb{E}_{(n)}| = m$ a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}}(x - \alpha)^{p^k}$.

Definice. Označme $\mathbb{P}_{(n)}$ množinu všech generátorů grupy $\mathbb{E}_{(n)}$. Pokud charakteristika tělesa nedělí n, budeme prvkům $\mathbb{P}_{(n)}$ říkat *primitivní n-té odmocniny z jedné* a polynomu $Q_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}}(x - \alpha) \in \mathbb{F}_{(n)}[x]$ n-tý *cyklotomický polynom.*

Připomeňme, že symbol φ značí Eulerovu funkci, tedy zobrazení dané například vztahem $\varphi = |\mathbb{Z}_n^*|$

Pozorování. Nechť $\mathbb{F}$ je těleso charakteristiky p a nechť p nedělí n.

(1) $\mathbb{E}_{(n)} = \bigcup_{k \mid n} \mathbb{P}_{(k)}$ a sjednocení je disjunktní,
(2) $\deg(Q_n) = |\mathbb{P}_{(n)}| = \varphi(n)$,
(3) pokud $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pak $\mathbb{F}_{(n)} = \mathbb{F}(\alpha)$.

Věta 5.6. Nechť $q = p^r = |\mathbb{F}|$, charakteristika p nedělí n, $\mathbb{F}_p$ je prvotěleso tělesa $\mathbb{F}$ a d značí řád prvku (q)mod n v grupě $\mathbb{Z}_n^*$ (tj. nejmenší kladné d, pro něž $q^d \equiv 1 \pmod{n}$). Potom

(1) $x^n - 1 = \prod_{k \mid n} Q_k$,

(2) $Q_n \in \mathbb{F}_p[x]$,
(3) Q_n se rozkládá nad tělesem $\mathbb{F}$ na právě $\frac{\varphi(n)}{d}$ ireducibilních polynomů stupně $d = [\mathbb{F}_{(n)} : \mathbb{F}]$.

Důkaz. (1) Protože $\mathbb{E}_{(n)}$ tvoří cyklickou grupu řádu n dostáváme $x^n - 1 = \prod_{\alpha\in\mathbb{E}_n}(x-\alpha) = \prod_{k|n} Q_k$ přímo z definice a Pozorování (1).

(2) Indukcí podle n nesoudělného s p nahlédneme, že $Q_n \in \mathbb{F}_p[x]$. Pro $n = 1$ tvrzení platí a nyní předpokládejme, že pro všechna $k < n$, pro něž $k \mid n$, platí $Q_k \in \mathbb{F}_p[x]$. Potom podle (1)

$$Q_n = \frac{x^n - 1}{\prod_{k|n,k<n} Q_k} \in \mathbb{F}_p[x],$$

neboť výsledek dělení (s nulovým zbytkem) má koeficienty opět v prvotělese $\mathbb{F}_p$.

(3) Uvažme prvek $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$. Potom si díky Lagrangeově větě uvědomíme platnost ekvivalencí

$$\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}^* \Leftrightarrow \alpha^{q^k-1} = 1 \Leftrightarrow n \mid q^k - 1 \Leftrightarrow q^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n).$$

Protože je d řád prvku $(q)\mathrm{mod}\ n$ v grupě $\mathbb{Z}_n^*$, dostáváme podle předchozího pozorování, že $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}$ a $\alpha \notin \mathbb{F}_{q^i}$ pro všechna $i < d$ (která zároveň dělí d). Tudíž $\mathbb{F}_{q^d} = \mathbb{F}_q(\alpha)$ podle 5.3. Je-li nyní m libovolný monický ireducibilní faktor Q_n nad $\mathbb{F}_q$, existuje $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pro které $m(\alpha) = 0$, tedy jde o minimální polynom α nad $\mathbb{F}_q$ a podle známého tvrzení z algebry

$$\deg(m) = [\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = [\mathbb{F}_{q^d} : \mathbb{F}_q] = d.$$

Konečně počet polynomů plyne z faktu, že $\deg Q_n = \varphi(n)$. □

Příklad 5.7. Pro $q = |\mathbb{F}|$, $n = q^r - 1$ máme $x^n - 1 = \frac{x^{q^r} - x}{x}$, proto $\mathbb{F}_{(n)} = \mathbb{F}_{q^r}$ a $\mathbb{E}_{(n)} = \mathbb{F}_{q^r}^*$. Tedy pro $\mathbb{F}_3$ dostáváme například

(a) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $\mathbb{F}_{(2)} = \mathbb{F}_3$ a $\mathbb{E}_{(2)} = \mathbb{F}_3^* = \{1, 2\}$.
(b) $x^8 - 1 = \prod_{a\in\mathbb{F}_9^*}(x - a) = Q_1Q_2Q_4Q_8$, $\mathbb{F}_{(8)} = \mathbb{F}_9$ a $\mathbb{E}_{(8)} = \mathbb{F}_9^*$.

Příklad 5.8. Nad $\mathbb{F}_2$ máme

$$Q_1 = x - 1,\ Q_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1,\ Q_5 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Potom $Q_{15} = \frac{x^{15}-1}{Q_1Q_3Q_5}$.

Zřejmě jsou Q_1 a Q_3 ireducibilní a protože 2 má v $\mathbb{Z}_5^*$ řád 4, je ireducibilní podle 5.6(2) rovněž cyklotomický polynom Q_5. Protože 2 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 4 a Q_{15} je stupně 8, je součinem dvou ireducibilních polynomů stupně 4.

Konečně $x^{30} - 1 = (x^{15} - 1)^2 = Q_1^2Q_3^2Q_5^2Q_{15}^2$, tedy $x^{30} - 1$ má právě 10 ireducibilních faktorů.

6. Cyklické kódy

Cílem kapitoly je kompletní popis třídy lineárních kódů uzavřených na cyklické posunutí souřadnic, kterým se říká cyklické kódy. Ukážeme, že všechny lze nahlížet jako hlavní ideály faktorových okruhů $\mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$ určené právě děliteli polynomu $x^n - 1$. S využitím *popisu faktorizace x^n-1 z předchozí kapitoly, tak získáme popis všech lineárních cyklických kódů.*

Předpokládáme, že $n > 1$ je přirozené a souřadnice slov délky n budeme nově indexovat $\mathbf{c} = c_0c_1\dots c_{n-1}$, tedy čísly $0,\dots,n-1$. Hlavní ideál oboru $\mathbb{F}[x]$ generovaný polynom f budeme značit (f) a rozkladovou třídu $g+(f)$ faktorového okruhu $\mathbb{F}[x]/(f)$ budeme značit $[g]$.

Definice. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je *cyklický*, pokud pro každé slovo $c_0c_1\dots c_{n-2}c_{n-1} \in \mathcal{C}$ platí, že $c_{n-1}c_0\dots c_{n-3}c_{n-2} \in \mathcal{C}$.

Příklad 6.1. (1) Kód $\mathcal{C}_1 = \{0123, 3012, 2301, 1230\} \subset \mathbb{F}_5^4$ je nelineární cyklický.

(2) Kód $\mathcal{C}_2 = \mathrm{LO}(1111) \subset \mathbb{F}_5^4$ je lineární cyklický.

(3) Všimněme si, že sjednocení cyklických kódů stejné délky nad stejným tělesem, tedy například $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, tvoří opět cyklický kód.

T&N. Uvažujme zobrazení $\nu : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ dané vztahem $\nu(c_0c_1\dots c_{n-1}) = [\sum_{i=0}^{n-1} c_ix^i]$, kde $[p]$ značí rozkladovou třídu modulo hlavní ideál (x^n-1).

Na množině $\mathbb{F}^n$ uvažujme standardní vektorové operace $+$, $-$ a definujme operaci $\cdot$ pomocí operace násobení na faktorovém okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ tak, aby

$$\nu(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \nu(\mathbf{u})\cdot\nu(\mathbf{v}) = [\sum_{i=0}^{n-1} u_ix^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} v_ix^i] = [\sum_{i=0}^{2n-2}(\sum_{r=0}^{i} u_rv_{i-r})x^i].$$

Označme $\mathbf{1} = 10\dots00$.

Připomeňme, že $\mathbb{F}[x]$ je Eukleidův obor, kde umíme algoritmicky hledat největší společné dělitele (nsd) i nejmenší společné násobky (nsn). $\mathbb{F}[x]$ a každý jeho faktor je tudíž obor hlavních ideálů.

Pozorování. Uvažujme výše uvedené značení. Potom

(1) $\mathbb{F}[x]_n = (\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ tvoří komutativní okruh a ν je izomorfismus okruhů i vektorových prostorů.

(2) $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ i $\mathbb{F}[x]_n$ jsou okruhy hlavních ideálů,

(3) je-li $\mathbf{e} = \nu^{-1}([1x])$, pak $\mathbf{e} = 010\dots00$ a

$$\mathbf{e}\cdot c_0c_1\dots c_{n-2}c_{n-1} = c_{n-1}c_0\dots c_{n-3}c_{n-2},$$

T&N. Okruh $(\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z předchozího Pozorování budeme značit $\mathbb{F}[x]_n$.

Poznámka 6.2. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je lineární a cyklický, právě když $\mathcal{C}$ je ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$.

Důkaz. Protože ν je izomorfismus, stačí dokázat, že $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je cyklický lineární kód , právě když je $\nu(\mathcal{C})$ ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$.

($\Rightarrow$) Předpokládáme-li, že $\mathcal{C}$ je cyklický lineární kód, potom je i jeho obraz $\nu(\mathcal{C})$ podle předchozího pozorování podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ nad tělesem $\mathbb{F}$. Protože je $\mathcal{C}$ uzavřeno na cyklické posunutí, $\nu(\mathcal{C})$ je uzavřeno na násobení třídou $[x]$ monomu x. Indukcí nahlédneme, že $\forall i \geq 1$ a $\forall [p] \in \nu(\mathcal{C})$ $[x^i]\cdot[p] = [x]\cdot[x^{i-1}]\cdot[p] \in \nu(\mathcal{C})$, z čehož plyne, že pro každý polynom $\sum_i a_ix^i \in \mathbb{F}[x]$ dostáváme

$$[\sum_i a_ix^i]\cdot[p] = \sum_i a_i[x^i\cdot p] \in \nu(\mathcal{C}).$$

($\Leftarrow$) Je-li naopak $\nu(\mathcal{C})$ ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$, pak $\mathcal{C}$ je lineární kód, protože ν je izomorfismus vektorových prostorů a $\nu(\mathcal{C})$ podprostor. Podmínka cykličnosti díky Pozorování (3) plyne z uzavřenosti $\nu(\mathcal{C})$ na násobení prvkem $[x]$. □

Pozorování. V okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ platí: .

(1) $([f]) = ([\text{nsd}(f, x^n-1)])\ \forall\ f \in \mathbb{F}[x]$,
(2) každý ideál ideál je tvaru $([f])$ pro nějaké $f \in \mathbb{F}[x]$, které dělí x^n-1.

T&N. Pro každý polynom $f \in \mathbb{F}[x]$ stupně menšího než n definujme množinu

$$\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \exists g \in \mathbb{F}[x] : \deg g < n - \deg f, \nu(\mathbf{u}) = [f \cdot g]\}$$

Věta 6.3. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je lineární cyklický, právě když $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$ pro nějaký polynom $f \in \mathbb{F}[x]$, který dělí x^n-1.

Důkaz. Díky 6.2 víme, že $\mathcal{C}$ je cyklický, právě když je to ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$. Protože $\nu : \mathbb{F}[x]_n \to \mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ je izomorfismus okruhů i vektorových prostorů, a ideály druhého (které tvoří podprostor) jsou právě tvaru $([f])$ pro nějaký $f \mid x^n-1$, stačí pro každý takový polynom f ověřit, že $\nu(\mathcal{C}(f)) = ([f])$. Nechť tedy f dělí x^n-1.

($\subseteq$) Z definice $\mathcal{C}(f)$ platí, že $\nu(\mathcal{C}(f)) \subseteq ([f])$.

($\supseteq$) Nechť $[h] \in ([f])$ a označme $g := \frac{x^n-1}{f}$. Potom existuje $a \in \mathbb{F}[x]$, pro které

$$[h] = [a] \cdot [f] = [(af)\text{mod } x^n-1] = [(a)\text{mod} g \cdot f] \in \nu(\mathcal{C}(f)),$$

a proto $([f]) \subseteq \nu(\mathcal{C}(f))$. □

Poznámka 6.4. Nechť pro $g = \sum_i g_i x^i, h = \sum_i h_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ platí, že $x^n-1 = g \cdot h$ a označme $k = \deg h$. Pak $\deg g = n-k$, $\mathcal{C}(g)$ je $[n,k]$-kód a

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} \end{pmatrix} \text{ je generující matice } \mathcal{C}(g),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_k & \dots & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \text{ je kontrolní matice } \mathcal{C}(g),$$

kde $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{n-k \times n}$.

Důkaz. matice $\mathbf{G} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ je odstupňovaná s nenulovými řádky, proto je hodnosti k. Podobně $\mathbf{H}$ je hodnosti $n-k$. Pokud $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$, pak

$$\nu^{-1}([ag]) = \nu^{-1}([a])\mathbf{G} = a_0 \dots a_{k-1} \cdot \mathbf{G},$$

tudíž je $\mathbf{G}$ je generující matice $\mathcal{C}(g)$. Zbývá nahlédnout, že $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.

Nejprve spočítáme koeficienty součinu $x^n-1 = gh = \sum_{s=0}^{n}(\sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r})x^s$. Odtud vidíme, že $\sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r} = 0\ \forall s \in \{1, \dots, n-1\}$.

Označme $\mathbf{G}_i$ i-tý řádek matice $\mathbf{G}_i$ a $\mathbf{H}_j$ j-tý řádek matice $\mathbf{H}_j$ pro $i = 0, \dots k-1$ a $j = 0, \dots n-k-1$, pak

$$\mathbf{G}_i \mathbf{H}_j^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \\ h_k \\ . \\ h_0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i} h_{k+j-r} = 0,$$

protože $\sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i} h_{k+j-r} = \sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r} = 0$ pro $s = k + j - i$, kde $0 \le i \le k-1$ a $0 \le j \le n-k-1$, a proto $1 \le s \le n-1$.

Protože $\mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, je $\mathbf{G}$ generující a $\mathbf{H}$ kontrolní matice kódu $\mathcal{C}(g)$. □

Jakmile umíme najít ireducibilní rozklad polynomu $x^n - 1$ a tedy i všechny dělitele tohoto polynomu, umíme najít všechny cyklické kódy délky n nad tělesem $\mathbb{F}$.

Příklad 6.5. Ireducibilní rozklad polynomu $x^3 - 1$ v oboru $\mathbb{F}_2[x]$ je

$$x^3 - 1 = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1),$$

proto máme právě 4 dělitele $x^3 - 1$ a tedy existují právě 4 cyklické binární lineární kódy délky 3. Dva triviální odpovídají triviálním dělitelům $\mathcal{C}(1) = \mathbb{F}_2^3$, $\mathcal{C}(x^3+1) = \{\mathbf{0}\}$.

Potom má kód $\mathcal{C}(x+1)$ generující matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, zatímco kód $\mathcal{C}(x^2 + x + 1)$ má generující matici $\mathbf{H}$ a kontrolní matici $\mathbf{G}$.

7. GRS kódy a jejich ostatky

V této kapitole kapitole se vrátíme k MDS kódům a ukážeme, že klasická Reedova-Solomonova konstrukce představuje cyklický MDS kód. A ačkoli jejich reziduální kódy už MDS nejsou představují velmi užitečné třídy kódů se zajímavými vlastnostmi.

V celé sekci uvažujme, že charakteristika p tělesa $\mathbb{F}$ nedělí n, souřadnice slov jsou indexovány od 0 a $\mathbb{F}_{(n)}$ značí rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad tělesem $\mathbb{F}$.

Nejprve zobecníme konstrukci MDS kódu z příkladu 3.7:

T&N. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}^*$ jsou po dvou různé prvky, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$. Potom pro $r < n$ označme v souladu s příkladem 3.7 matice

$$\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \dots & \alpha_n^{r-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{r \times n}, \quad \Delta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

Lineární kód $\mathcal{C} = \ker(\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v}))$ s kontrolní maticí $\mathbf{H}_{r,\underline{\alpha}}\Delta(\mathbf{v})$ se nazývá *zobecněný Reedův-Solomonův* (GRS) kód s *lokátory* $\underline{\alpha}$ a *multiplikátory* $\mathbf{v}$.

Dále řekneme, že je $\mathcal{C}$

- *normovaný* GRS kód, pokud $v_i = 1\ \forall i$,
- *Reedův-Solomonův* (RS), pokud existuje prvek $\alpha \in \mathbb{F}^*$ řádu n a $0 \le b < n$ tak, že $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ a $v_i = \alpha^{b(i-1)}$.

Pozorování. Uvažujme předpoklady předchozí terminologické poznámky a $0 < k < n$.

(1) GRS kódy jsou MDS díky 3.2 a 3.7,

(2) [n,k] RS kód má pro $t = n-k-1$ a $0 \le b < n$ generující a kontrolní matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{n-b+1} & \alpha^{2(n-b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+1)} \\ 1 & \alpha^{n-b+2} & \alpha^{2(n-b+2)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+2)} \\ . & . & \dots & . & \\ . & . & \dots & . & \\ 1 & \alpha^{n-b+k} & \alpha^{2(n-b+k)} & \dots & \alpha^{(n-1)(n-b+k)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{b} & \alpha^{2b} & \dots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ . & . & \dots & . & \\ . & . & \dots & . & \\ 1 & \alpha^{b+t} & \alpha^{2(b+t)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+t)} \end{pmatrix},$$

protože hodnost první matice je k, druhé $n-k$ a bodový součin i-tého a j-tého řádku, kde $1 \le i \le k$ a $0 \le j \le n-k-1$, a proto $1 \le i+j \le n-1$, je

$$\sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(n-b+i)}\alpha^{s(b+j)} = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(n-b+i+b+j)} = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha^{s(i+j)} = \frac{\alpha^{n(i+j)}-1}{\alpha^{i+j}-1} = 0.$$

Věta 7.1. Označíme-li zobrazení $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}[x]$dané pravidlem $\mu(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i$ pro $\mathbf{u} = u_0 \dots u_{n-1} \in \mathbb{F}^n$ (tedy $\nu(\mathbf{u}) = [\mu(\mathbf{u})]$), potom

(1) je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ lineární cyklický kód, $M = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha) = 0\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ a $f = \prod_{\alpha \in M} x - \alpha$, pak $f \in \mathbb{F}[x]$, f dělí $x^n - 1$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$,

(2) je-li $\alpha_i \in \mathbb{F}_{(n)}$ kořen $x^n - 1$, m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}$ pro $i = 1, \dots, r$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0\ \forall i \le r\}$, pak $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{C}(m_i) = \mathcal{C}(\mathrm{nsn}_{i \le r}(m_i))$ je cyklický kód.

Důkaz. (1) Připomeňme, že charakteristika p nedělí n, proto podle 6.3 existuje monický polynom g, který dělí $x^n - 1$ a platí, že $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g)$. Dále $\mathrm{nsd}(x^n - 1, nx^{n-1}) = 1$, proto jsou všechny kořeny polynomů $x^n - 1$ i g jednoduché, a existuje podmnožina $L \subseteq \mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$ splňující $g = \prod_{\alpha \in L} x - \alpha$. Nyní snadno nahlédneme, že platí řada ekvivalencí

$$\alpha \in L \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu(\mathbf{u})(\alpha) = 0 \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}(g) \Leftrightarrow \alpha \in M.$$

Proto $g = f$, $L = M$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.

(2) Položme $f = \mathrm{nsn}_{i \le r}(m_i)$. Zvolíme-li $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pak platí, že $m_i \mid \mu(\mathbf{u})$ pro všechna i, z čehož plyne, že $f \mid \mu(\mathbf{u})$, a tudíž $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(f)$. Naopak, vezmeme-li $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(f)$, potom $f \mid \mu(\mathbf{u})$, a proto $\mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0$ pro všechna i, odkud dostáváme, že $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathrm{nsn}_{i \le r}(m_i))$ je cyklický kód. Rovnost $\mathcal{C}(\mathrm{nsn}_{i \le r}(m_i)) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{C}(m_i)$ plyne z popisu průniku ideálů v oboru hlavních ideálů. $\square$

Důsledek 7.2. RS kódy jsou cyklické

Důkaz. Buď $\mathcal{C}$ RS kód s lokátory $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ pro prvek grupy $\alpha \in \mathbb{F}^*$ řádu n a multiplikátory $v_i = \alpha^{b(i-1)}$. Pak $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, právě když

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^b & \alpha^{2b} & \dots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ . & . & \dots & . & \\ . & . & \dots & . & \\ 1 & \alpha^{b+n-k-1} & \alpha^{2(b+n-k-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(b+n-k-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

což nastává, právě když $\mu(\mathbf{u})(\alpha^{b+i}) = 0 \ \forall i < n-k$. Tedy $\mathcal{C}$ je cyklický podle věty 7.1(2). $\square$

Uvážíme-li, že reziduální kód $\mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ cyklického kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$ a že RS kódy jsou cyklické, dostáváme následující tvrzení:

Důsledek 7.3. Reziduální kódy RS kódů jsou cyklické.

Pozorování. Nechť $\mathbb{F}_q$ je podtěleso tělesa $\mathbb{F}_{q^r}$ a $\alpha_i \in (\mathbb{F}_{q^r})_{(n)}$, $\alpha_i^n = 1$ a označme m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_q$ a $m_{i,r}$ minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_{q^r}$. Pokud $f = \mathrm{nsn}_i(m_{i,r}) \in \mathbb{F}_{q^r}[x]$ a $g = \mathrm{nsn}_i(m_i) \in \mathbb{F}_q[x]$, pak díky větě 7.1(2) s využitím značení μ z této poznámky platí, že

(1) $\mathcal{C}(g) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \forall i\}$,
(2) $\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_{q^r}^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \forall i\}$,
(3) $\mathcal{C}(g) = \mathbb{F}_q^n \cap \mathcal{C}(f)$.

Poznamenejme, že se reziduální kódy GRS kódů obvykle nazývají *Alternantní* a reziduální kódy RS kódů se označují *BCH* kódy (jako zkratka jmen Bose, Chaudhuri a Hocquenghem), a protože jsou GRS kódy MDS $[n, l, D]_{q^r}$-kódy, platí pro pro BCH i alternantní $[n, k, d]_q$-kódy dimenzní odhad $k \geq n - r(D-1)$.

Příklad 7.4. Uvažujme těleso $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$ pro α splňující $\alpha^2 + 1 = 0$ a nad ním GRS $[6, 4, 3]_9$ kód s kontrolní maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2\alpha & \alpha+1 & 2\alpha+2 \end{pmatrix}$. Pro reziduální kód $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_3^6$ určíme stejně jako v důkazu 4.3 matici $\tilde{\mathbf{H}}$, pro níž platí, že $\tilde{\mathcal{C}} = \mathrm{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$. K tomu zvolíme bázi $1, \alpha$ prostoru $\mathbb{F}_9$ nad $\mathbb{F}_3$.

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Odtud vidíme, že $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3]_3$-kód a z 4.3 dostáváme odhad jeho vzdálenosti $d \geq 3$ (odhad pro k z 4.3 je pouze $k \geq 6 - 2 \cdot 2 = 2$). Díky 1.4 $d \leq 4$ a kdyby $d = 4$, šlo by o MDS kód, který by podle 4.1 musel mít vzdálenost shora omezenou velikostí tělesa, což by neplatilo. Tedy $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3, 3]_3$-kód.

8. Reedovy-Mullerovy kódy

Binární Reedovy-Mullerovy kódy představují třídu snadno konstruovatelných lineárních kódů, které podobně jako RS kódy popsané v předchozí kapitole disponují efektivním dekódovacím algoritmem. Výhodou konstrukce je předem známá vzdálenost kódu a fakt, který v této kapitole ověříme, že týž postup můžeme použít i pro vytvoření duálního kódu.

V celé kapitole předpokládáme, že $r \leq m \in \mathbb{N}$, $n = 2^m$ a slova $\mathbb{F}_2^m$ si pevně očíslujeme

$$\mathbb{F}_2^m = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}.$$

T&N. Každé množině

$$\mathcal{R}(m,r) = \{f(\beta_0)f(\beta_1)\ldots f(\beta_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n \mid f \in \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_m], \deg(f) \leq r\}.$$

budeme říkat binární *Reedův-Mullerův* kód (krátce RM-kód).

Dále označme $x_I = \prod_{i\in I} x_i$ pro každé neprázdné $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$, prázdnou množinu položíme $x_\emptyset = 1$ a definujme množiny *Booleových polynomů*

$$\mathcal{BP}_m(r) = \{\sum_{I:|I|\leq r} f_I x_I \mid f_I \in \mathbb{F}_2 \forall I \subseteq \{1,\ldots,m\}\},$$

speciálně $\mathcal{BP}_m = \mathcal{BP}_m(m)$ a na $\mathcal{BP}_m$ potom zavedeme strukturu okruhu

$$\sum_I a_I x_I \pm \sum_I b_I x_I = \sum_I (a_I \pm b_I) x_I$$
$$\sum_I a_I x_I \cdot \sum_J b_J x_J = \sum_{I,J} (a_I \cdot b_J) x_{I\cup J} = \sum_K \sum_{I,J:K=I\cup J} (a_I \cdot b_J) x_K,$$

kde všechna I, J bereme jako podmnožiny $\{1,\ldots,m\}$.

Dále označíme množinu *Booleových funkcí*

$$\mathcal{BF}_m = \{\mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2\}$$

a připomeňme, že na obou množinách $\mathcal{BF}_m$ i $\mathbb{F}_2^n$ máme k dispozici přirozeně po složkách definovanou strukturu okruhu:

$$(f \pm g)(\beta) = f(\beta) \pm g(\beta), \quad (f \cdot g)(\beta) = f(\beta) \cdot g(\beta)$$
$$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})_i = \mathbf{u}_i \pm \mathbf{v}_i, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_i = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

pro libovolné funkce $f, g \in \mathcal{BF}_m$, slova $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n$ a všechny souřadnice $i = 1,\ldots,n$.

Konečně, $i_J = i_1 \ldots, i_m$ je incidenční vektor množiny I, tj. $i_j = 1 \Leftrightarrow j \in J$ a pro $I, J \subseteq \{1,\ldots,m\}$ značme $\chi_I \in \mathcal{BF}_m$ funkci danou podmínkou $\chi_I(i_J) = 1 \Leftrightarrow J = I$.

Pozorování. Pro RM kódy, Booleovy polynomy a Booleovy funkce platí:

(1) $\mathcal{R}(m,r) = \{p(\beta_0)\ldots p(\beta_{n-1}) \mid p \in \mathcal{BP}_m(r)\}$ je lineární kód délky $n = 2^m$,
(2) $(\mathcal{BP}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ a $(\mathcal{BF}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ jsou komutativní okruhy,
(3) přirozená projekce $p \to [p]$ je izomorfismus okruhů

$$\mathcal{BP}_m \cong \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_m]/(x_1^2 + x_1, \ldots, x_m^2 + x_m),$$

(4) zobrazení $f \to f(\beta_0)\ldots f(\beta_{n-1})$ je izomorfismus okruhů $\mathcal{BF}_m \cong \mathbb{F}_2^n$,
(5) pro každé $f \in \mathcal{BF}_m$ platí, že $f = \sum_{I:f(i_I)=1} \chi_I$.

Všimněme si, že všechny tři uvažované izomorfní okruhy jsou zároveň vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}_2$ (tedy $\mathbb{F}_2$-algebry). Protože násobení skalárem z $\mathbb{F}_2$ žádný nový požadavek na okruhový homomorfismus nepředstavuje, je uvažované okruhový izomorfismy zároveň izomorfismy vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

Nadále budeme pomocí izomorfismu z Pozorování (4) ztotožňovat okruhy $\mathcal{B}$ a $\mathbb{F}_2^n$ a obě značení budeme podle potřeby zaměňovat.

T&N. Pro polynom $p = \sum_i p_I x_I \in \mathcal{BP}_m$ budeme značit

$$N(p) = \{i_I \in \mathbb{F}_2^m \mid p(i_I) = 1\} \quad \text{a} \quad \deg(p) = \max\{|I| \mid p_I \neq 0\} \cup \{-1\}.$$

Poznámka 8.1. Jestliže $p \in \mathcal{BP}_m(r) \setminus \{0\}$, pak $|N(p)| \geq 2^{m-r}$.

Důkaz. Dokazujeme indukcí podle $m \geq 1$ a p stupně $\deg(p) \leq r$.

(a) Pro $m = 1$ uvažujeme polynomy tvaru $p = a_0 + a_1 x_1 \in K[x_1]$. Provedeme diskusi pro oba případy $r = 0, 1$.

Pro $r = 0$ máme $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$, proto $p = 1$ a $|N(p)| = 2 = 2^{1-0}$.

Pro $r = 1$ triviálně dostáváme $|N(p)| \geq 1 = 2^{1-1}$.

(b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$ a dokážeme ho pro $m > 1$. Nechť $p = x_m g + h$, kde $g, h \in \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_{m-1}]$.

Pokud $g = 0$, pak $\deg h = \deg p$ a platí ekvivalence

$$h(i_1 \ldots i_{m-1}) = 1 \;\Leftrightarrow\; p(i_1 \ldots i_{m-1}, 0) = p(i_1 \ldots i_{m-1} 1) = 1,$$

proto s využitím indukčního předpokladu pro h dostáváme, že

$$|N(p)| = 2|N(h)| \geq 2 \cdot 2^{m-1-r} = 2^{m-r}.$$

Pokud $g \neq 0$, pak $\deg g \leq r - 1$ a $\forall (i_1, \ldots, i_{m-1}) \in N(g)$ existuje $t \in \mathbb{F}_2$ splňující $p(i_1, \ldots, i_{m-1}, t) = g(i_1, \ldots, i_{m-1})t + h(i_1, \ldots, i_{m-1}) = t + h(i_1, \ldots, i_{m-1}) = 1$, proto

$$|N(p)| \geq |N(g)| \geq 2^{m-1-(r-1)} = 2^{m-r}.$$

díky platnosti indukčního předpokladu pro g. □

T&N. Označme zobrazení $\Phi : \mathcal{BP}_m \to \mathcal{BF}_m$ dané podmínkou $\Phi(p)(\beta) = p(\beta)$.

Ztotožnění $\mathcal{BF}_m \cong \mathbb{F}_2^n$ bijekcí $f \to f(\beta_0) \ldots f(\beta_{n-1})$ umožňuje zobrazení Φ popsat vztahem $\Phi(p) = p(\beta_0) \ldots p(\beta_{n-1})$.

Pozorování. Pro množiny $J, Y \subseteq \{1, \ldots, m\}$ platí:

(1) Položíme-li $p_J = (\prod_{i \in J} x_i) \cdot (\prod_{i \notin J}(x_i + 1))$, pak $\Phi(p_J) = \chi_J$, tedy pokud pro $f \in \mathcal{BF}_m$ položíme $p = \sum_{I : f(i_I) = 1} p_I$, pak

$$\Phi(p) = \sum_{I : f(i_I) = 1} \Phi(p_I) = \sum_{I : f(i_I) = 1} \chi_I = f,$$

(2) Φ je homomorfismus, který je podle (1) na $\mathbb{F}_2^n$, tedy jde o izomorfismus okruhů i vektorových prostorů stejné (konečné) mohutnosti 2^n,

(3) $\{x_I \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}, |I| \leq r\}$ je báze prostoru $\mathcal{BP}_m(r)$, proto je její izomorfní obraz $B_r = \{\Phi(x_I) \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}, |I| \leq r\}$ báze prostoru $\mathcal{R}(m, r)$,

(4) $w(\Phi(p)) = |N(p)|$ pro všechny polynomy $p \in \mathcal{BP}_m$,

(5) $x_J(i_Y) = \prod_{j \in J} (i_Y)_j = 1 \Leftrightarrow J \subseteq Y$.

Věta 8.2. $\mathcal{R}(m,r)$ je $[n, \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}, 2^{m-r}]_2$ kód.

Důkaz. Vidíme, že $\dim(\mathcal{R}(m,r)) = |\{I \subseteq \{1,\ldots,m\} \mid |I| \le r\}| = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$ díky Pozorování (2) a (3) .

Jestliže $|I| = r$, potom $\Phi(x_I) \in \mathcal{R}(m,r)$, a proto $w(\Phi(x_I)) = |N(x_I)| = 2^{m-r}$ podle Pozorování (4) a (5). Tím jsme dokázali nerovnost $d(\mathcal{R}(m,r)) \le 2^{m-r}$.

Naopak z poznámky 8.1 a Pozorování (4) plyne opačná nerovnost $d(\mathcal{R}(m,r)) \ge 2^{m-r}$. □

Věta 8.3. Kódy $\mathcal{R}(m,r)$ a $\mathcal{R}(m,m-r-1)$ jsou vzájemně duální.

Důkaz. Nejprve dokážeme pro báze B_r a B_{m-r-1} z Pozorování (3), že pro každou dvojici $\Phi(x_I) \in B_r$, $\Phi(x_J) \in B_{m-r-1}$ je bodový součin $\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = 0$. Protože $|I| \le r$ a $|J| \le m-r-1$, spočítáme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = \sum_B x_I(i_B) \cdot x_J(i_B) = \sum_B x_{I\cup J}(i_B).$$

Uvědomíme-li si, že podle Pozorování (5) platí, že $x_{I\cup J}(i_B) = 1$, právě když $I \cup J \subseteq B$ a že $|I \cup J| \le r + m - r - 1 = m - 1$, dostáváme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) \equiv \sum_{B: I\cup J \subseteq B} 1 \equiv 2^{m-|I\cup J|} \equiv 0 \pmod 2.$$

Dokázali jsme, že $\mathcal{R}(m,r) \subseteq \mathcal{R}(m,m-r-1)^\perp$ a $\mathcal{R}(m,m-r-1) \subseteq \mathcal{R}(m,r)^\perp$. Protože navíc podle 8.2 $\dim \mathcal{R}(m,r) + \dim \mathcal{R}(m,m-r-1) =$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} + \sum_{i=0}^{m-r-1} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} + \sum_{i=r+1}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$$

jsou prostory $\mathcal{R}(m,r)$ a $\mathcal{R}(m,m-r-1)$ vzájemně duální. □

Příklad 8.4. (1) $\mathcal{R}(3,1)$ je podle 8.2 a 8.3 samoduální $[8,4,4]_2$-kód. Všimněme si podobně jako v příkladu 3.5, že propíchnutí $\mathcal{R}(3,1)$ v kterékoli souřadnici je permutačně ekvivalentní 1-perfektnímu Hammingovu $[7,4,3]_2$-kódu z 2.4.

(2) Obdobně uvážíme, že $\mathcal{R}(m,m-2) = \mathcal{R}(m,1)^\perp$ je $[2^m, 2^m-m-1, 4]_2$-kód a jeho propíchnutí v kterékoli souřadnici je díky 1.3 1-perfektní $[2^m-1, 2^m-m-1, 3]_2$-kód.

Na závěr pro ilustraci užitečnosti RM kódů nastíníme myšlenku kódování a dekódování (téma ovšem nebude letos obsahem zkoušky).

Kódování. Označíme $\mathcal{P}_r^m = \{I \subset \{1,\ldots,m\} \mid |I| \le r\}$ a $k = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$. Slovo $\mathbf{v}$ z $\mathbb{F}_2^k$ reprezentované polynomem $f_{\mathbf{v}} = \sum_{I\in\mathcal{P}_r^m} v_I x_I$, kde souřadnice slova $\mathbf{v}$ indexujeme prvky množiny $\mathcal{P}_r^m$ mohutnosti k, zakódujeme vztahem $\mathbf{v} \to \Phi(f_{\mathbf{v}})$. Dostáváme lineární kódování $\mathbb{F}_2^k \cong \mathbb{F}_2^{\mathcal{P}_r^m} \to \mathcal{BF}(m) \cong \mathbb{F}_2^n$, jehož obrazem je RM-kód $\mathcal{R}(m,r)$.

Dekódování. Nejprve přidáme ještě jedno značení: je-li $f \in \mathcal{BP}_m$ nebo $f \in \mathcal{BF}_m$, $I, Y \subseteq \{1,\ldots,m\}$, pak definujme $f^I \in \mathcal{BF}_m$ předpisem

$$f^I(i_Y) = \sum_{B: Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} f(i_B).$$

Nyní zformulujeme algoritmus, který přijaté chybové slovo s váhou chyby menší než 2^{m-r-1} reprezentovaného booleovskou funkcí opraví na původní polynom:

Vstup: $g \in \mathcal{BF}_m$ splňující $g = f + e$ pro $f \in \mathcal{R}(m,r)$ a $e \in \mathbb{F}_2^n$, $w(e) < 2^{m-r-1}$
Výstup: $\tilde{f} \in \mathcal{BP}_m(r)$, pro který $d(\Phi(\tilde{f}), g) < 2^{m-r-1}$, proto $f = \Phi(\tilde{f})$.
for d=r downto 0 do
  for all $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ splňující $|I| = d$ do
    $\{\alpha_0 := |\{Y \subseteq \{1, \ldots, m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 0\}|$;
    $\alpha_1 := 2^{m-d} - \alpha_0$ $(= |\{Y \subseteq \{1, \ldots, m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 1\}|)$;
    if $\alpha_0 > \alpha_1$ then $a_I := 0$ else $a_I := 1$, $g := g + \Phi(x_I)$;
    $\}$
return $\sum_{I \in \mathcal{P}_r^m} a_I x_I$.

Korektností algoritmu se nebudeme zabývat, zájemci jeho důkaz naleznou například ve skriptech Aleše Drápala.

9. Golayovy perfektní kódy

Tentokrát se vrátíme k pojmu perfektního kódu. Zkonstruujeme binární 3-perfektní kód délky 23 a dokážeme o něm, že je určen jednoznačně až na posunutí a permutační ekvivalenci.

V celé kapitole předpokládáme, že $b, v \in \mathbb{N}$ a uvažujeme uspořádané množiny $X = \{x_1, \ldots, x_v\}$ a $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_b\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

T&N. Pro $B, C \in \mathcal{B}$ definujme $i_B = i_1 \ldots i_v \in \mathbb{Z}^v$ podmínkou $i_j = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_j \in B \\ 0 & \text{pokud } x_j \notin B \end{cases}$. Dále označme $i_B \cap i_C = i_{B \cap C}$, tedy pokud bychom i_B a $i_C = i_{B\cap C}$ chápali jako vektory $\mathbb{F}_2^v$, pak by $\cap$ představovala operaci násobení po složkách na na $\mathbb{F}_2^v$. Řekneme, že matice $M = \begin{pmatrix} i_{B_1} \\ \ldots \\ i_{B_b} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{b \times v}$ je *incidenční matice* systému $\mathcal{B}$.

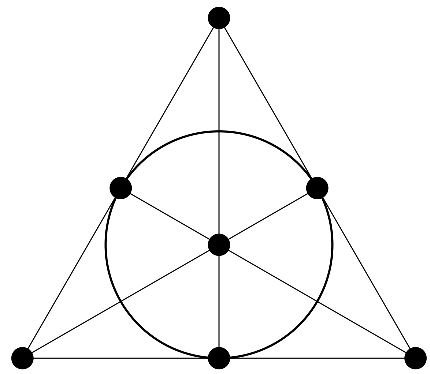
Pozorování. Nechť M je incidenční matice systému $\mathcal{B}$ a položme $U = (u_{ij}) = MM^T$ a $V = (v_{ij}) = M^T M$. Potom platí:

(1) Jestliže $B, C \subseteq X$, pak $w(i_B + i_C) = |B \div C| = w(i_B) + w(i_C) - 2w(i_{B\cap C})$, kde i_B, i_C chápeme jako slova z $\mathbb{F}_2^v$,
(2) U je symetrická čtvercová, $u_{ij} = |B_i \cap B_j|$ $\forall i, j$ a $u_{ii} = |B_i|$,
(3) V je symetrická čtvercová, $v_{ij} = |\{s \mid \{x_i, x_j\} \subseteq B_s\}|$ $\forall i, j$ a $v_{ii} = |\{s \mid x_i \in B_s\}|$.

T&N. Pro $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$ řekneme, že $\mathcal{B}$ je *symetrický* $2-(v,k,\lambda)$ *design*, pokud

- $v = |X| = |\mathcal{B}|$,
- $k = |B| = |\{C \in \mathcal{B} \mid x \in C\}|$ pro $\forall B \in \mathcal{B}$ a $\forall x \in X$,
- $\lambda = |B_i \cap B_j| = |\{C \in \mathcal{B} \mid \{x, y\} \subseteq C\}|$ $\forall i \neq j$ a $\forall x \neq y \in X$.

Příklad 9.1. (1) Přímky Fanovy roviny, tj. projektivního prostoru $P_2(\mathbb{F}_2)$ všech jednodimenzionálních podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{F}_2^3$ tvoří symetrický $2-(7,3,1)$ design.



(2) Obecněji, nechť $\mathcal{P} = \{\mathrm{LO}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, $B_V = \{p \in \mathcal{P} \mid p \subseteq V\}$, pak $\mathcal{B} = \{B_V \mid V \leq \mathbb{F}_q^3, \dim V = 2\}$ je symetrický $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$ design.

Pozorování. Systém $\mathcal{B}$ s incidenční maticí M je symetrický $2-(v,k,\lambda)$ design, právě když $MM^T = M^TM = \begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ . & . & \dots & . \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$.

Konstrukce

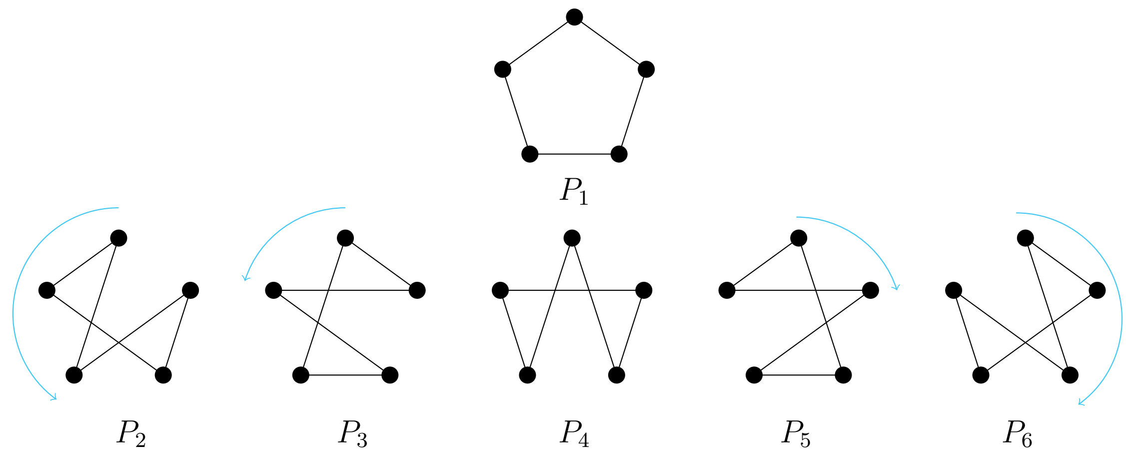
Nechť $Y = \{1,\dots,5\}$, $Z = \{A \subset \mathcal{P}(Y) \mid |A| = 2\}$, $\Phi = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma^5 = 1, \sigma \neq \mathrm{id}\}$, $P_\varphi = \{\{i, \varphi(i)\} \mid i \in Y\}$ $\forall \varphi \in \Phi$.

Pozorování. Pro množiny Y, Z, Φ a P_φ a $\forall \varphi, \psi \in \Phi$ platí:

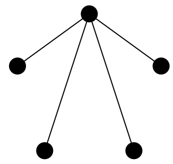
(1) $|Z| = 10$, $|\Phi| = 24$, $|\{P_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}| = 12$,
(2) φ ani φ^{-1} nemají pevný bod, tudíž $P_\varphi \cap P_{\varphi^2} = \emptyset$,
(3) jestliže $|P_\varphi \cap P_\psi| \geq 4$, potom $P_\varphi = P_\psi$,
(4) jestliže $|P_\varphi \cap P_\psi| \leq 1$, potom $|P_{\varphi^2} \cap P_\psi| \geq 4$, a proto $P_\varphi \cap P_\psi = \emptyset$,

Definujme množiny

$$P_1 = P_{(12345)},\; P_2 = P_{(14235)},\; P_3 = P_{(14352)},\; P_4 = P_{(13254)},\; P_5 = P_{(13425)},\; P_6 = P_{(13542)},$$



Položme $X = Z \cup \{0\}$ a $\forall i \in Y$:

$$F_i = \{\{i,a\} \mid a \in Y, a \neq i\} \cup \{0\} =$$  $$\cup \{0\},$$

nyní zkonstruujme symetrický $2-(11,5,2)$ design: $\mathcal{B} = \{P_i \mid i \leq 6\} \cup \{F_j \mid j \leq 5\}$

T&N. Nechť $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1,2$. Pak $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$ (tj. systémy jsou izomorfní), pokud $\exists$ bijekce $b : X_1 \to X_2$, pro níž $\mathcal{B}_2 = \{b(B) \mid B \in \mathcal{B}_1\}$.

Fakt 9.2. Systém $\mathcal{B}$ z předchozí konstrukce je až na izomorfismus jediný symetrický $2-(11,5,2)$ design.

Důkaz. Důkazu se na přednášce nebudeme věnovat, ale pro informaci ho zde alespoň naznačíme.

Fakt, že $\mathcal{B}$ je $2-(11,5,2)$ design, se snadno přímočaře ověří z definice (a do značné míry je vidět ze znázornění množin grafy). Uvážíme $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(\tilde{X})$ jiný $2-(11,5,2)$ design a naším úkolem je najít izomorfismus $\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}$. Zvolíme nejprv libovolně $x_0 \in \tilde{X}$ a definujeme $\tilde{Z} = \tilde{X} \setminus \{x_0\}$, snadno nahlédneme, že existuje právě 5 množin $\tilde{\mathcal{B}}$, které obsahují x_0, a označíme je $\tilde{F}_i$, $i = 1, \dots 5$. Z definice designu plyne, že pro všechna $i < j$ existuje právě jedno $x_{ij} \in \tilde{Z}$ splňující $\tilde{F}_i \cap \tilde{F}_j = \{x_0, x_{ij}\}$.

Dále označíme $\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{B}} \setminus \{\tilde{F}_i \mid i \leq 5\}$. To, že $\lambda = 2$ znamená, že $\{i < j\} \to x_{ij}$ je bijekce deseti prvkové množiny dvojic $\{i < j\}$ na $\tilde{Z}$, proto $\tilde{Z} = \{x_{ij} \mid i < j \leq 5\}$. Nyní definujme bijekci $b : \tilde{X} \to X$: $b(x_0) = 0$ a $b(x_{ij}) = \{i,j\}$, která je hledaným izomorfismem. Zřejmě $\{b(\tilde{F}_i)\} = F_i$, a pokud $P_1 \notin \mathcal{P} = \{b(\tilde{B}) \mid \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$, změníme pořadí $\tilde{F}_i$ tak, aby $P_1 \in \mathcal{P}$. Vidíme, že množina $\mathcal{P} = \{b(\tilde{P}) \mid \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$ obsahuje P_1 a $|b(\tilde{P}_1) \cap b(\tilde{P}_2)| = 2 \; \forall \tilde{P}_1 \neq \tilde{P}_2 \in \mathcal{P}$. Na závěr zbývá uvážit, že Pro $\{P_1, \dots, P_6\}$ je vzhledem k inkluzi největší podmnožina $\{P_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$, která obsahuje P_1 a platí $|P_i \cap P_j| = 2$ pro všechny $i \neq j$, a že odtud plyne závěr $\tilde{\mathcal{B}} = \{b(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. □

Důsledek 9.3. $\mathcal{C} = \{X \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ pro $\mathcal{B}$ z předchozí konstrukce tvoří až na izomorfismus jediný symetrický $2-(11,6,3)$ design.

Důkaz. Definujme zobrazení $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ vztahem $c(A) = X \setminus A$ a označme M incidenční matici $\mathcal{B}$, N incidenční matici $\mathcal{C}$ a $J = (1) \in \mathbb{Z}^{11\times 11}$ matici sestávající ze samých hodnot 1. Potom vidíme, že $N = J - M$ a snadno spočítáme

$$N \cdot N^T = J^2 - JM^T - MJ + MM^T = 11J - 5J - 5J + MM^T = J + MM^T.$$

Podobně $N^T \cdot N = J + M^TM = J + MM^T$, proto

$$N \cdot N^T = N^T \cdot N = J + \begin{pmatrix} 5 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 5 & \dots & 2 \\ . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & \dots & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 6 & \dots & 3 \\ . & . & \dots & . \\ 3 & 3 & \dots & 6 \end{pmatrix}$$

a $\mathcal{C}$ je tudíž symetrický $2-(11,6,3)$ design.

Obdobně nahlédneme, že pro symetrický $2-(11,6,3)$ design $\mathcal{C}$ s incidenční maticí N platí pro incidenční matici $M = J - N$ systému $c(\mathcal{C})$, že je $M^T M = M M^T = N^T N - J$, proto je $c(\mathcal{C})$ symetrický $2-(11,5,2)$ design. Kdybychom nyní měli dva neizomorfní symetrické $2-(11,6,3)$ designy, pak by je bijekce c převedla na neizomorfní $2-(11,5,2)$ designy. Proto jsou i $2-(11,6,3)$ designy určeny až na izomorfismus jednoznačně. □

T&N. Nechť N je incidenční matice $2-(11,6,3)$ designu a uvažujme blokové matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ . & . & \dots & . & . & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ . & . & \dots & . & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{pmatrix},$$

kde $E \in \mathbb{F}_2^{12\times 24}$ sestává z bloku s jednotkovou maticí I_{12} a dále z bloku tvořeným maticí N s řádkem nad a sloupcem vlevo obsahujícím na první souřadnici 0 a jinde 1 a $G \in \mathbb{F}_2^{12\times 24}$ vznikne z E vypuštěním 13. sloupce.

Dále $\mathcal{E}$ buď $[24,12]_2$-kód s generující maticí E a $\mathcal{G}$ $[23,12]_2$-kód s generující maticí G.

Jestliže $\mathcal{C}$ je blokový kód délky n a $f_i = |\{\mathbf{v} \in \mathcal{C} \mid w(\mathbf{v}) = i\}|$, pak se polynom $f_{\mathcal{C}} = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ nazývá *váhový polynom* kódu $\mathcal{C}$.

$\mathbf{1}$ bude značit slovo, jehož všechny souřadnice mají hodnotu 1.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C}$ je binární kód délky 23, velikosti 2^{12} a vzdálenosti 7. Protože $V_2(23,3) = \sum_{i=0}^{3}\binom{23}{i} = 1 + 23 + 23\cdot 11 + 23\cdot 77 = 2048 = 2^{23-12}$, je $\mathcal{C}$ nutně 3-perfektní. Uvážíme, že každé slovo váhy i leží právě v jedné binární kouli $S(\mathbf{u},3)$ o poloměru 3 a středu v kódovém slově $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy $w(\mathbf{u}) = i + j$ pro $-3 \le j \le 3$ a $w(\mathbf{u}) = i + j$ a označíme $c_{i,j}$ počet slov váhy i ležících v této kouli. Je-li $f_{\mathcal{C}} = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ váhový polynom kódu $\mathcal{C}$, potom pro všechna $i \ge 3$ platí vztah $\binom{23}{i} = \sum_{s=-3}^{3} c_{i,s} f_{i+s}$.

Hodnoty $c_{i,j}$ reprezentují počty slov váhy i, které dostaneme z kódového slova $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy $i + j$ pomocí daných bitových změn. Kombinatorickou úvahou určíme hodnoty koeficientů:

$c_{i,-3} = \binom{23-i+3}{3}$ je počet 3 bitových změn $0 \to 1$ pro $w(\mathbf{u}) = i - 3$,
$c_{i,-2} = \binom{23-i+2}{2}$ je počet 2 změn $0 \to 1$ pro $w(\mathbf{u}) = i - 2$,
$c_{i,-1} = \binom{i-1}{1}\binom{23-i+1}{2} + \binom{23-i+1}{1}$: $1 \times 0 \to 1$ nebo $2 \times 0 \to 1$ a $1 \times 1 \to 0$ pro $w(\mathbf{u}) = i-1$,
$c_{i,0} = 1 + \binom{i}{1}\binom{23-i}{1}$: slovo $\mathbf{u}$ nebo $1 \times 0 \to 1$ a $1 \times 1 \to 0$ pro $w(\mathbf{u}) = i$,
$c_{i,1} = \binom{i+1}{2}\binom{23-i-1}{1} + \binom{i+1}{1}$: $1 \times 1 \to 0$ nebo $2 \times 1 \to 0$ a $1 \times 0 \to 1$ pro $w(\mathbf{u}) = i + 1$,
$c_{i,2} = \binom{i+2}{2}$: $2 \times 1 \to 0$ pro $w(\mathbf{u}) = i + 2$,
$c_{i,3} = c_{i,3} = \binom{i+3}{3}$: $3 \times 1 \to 0$ pro $w(\mathbf{u}) = i + 3$.

Jestliže navíc kód $\mathcal{C}$ obsahuje slovo $\mathbf{0}$, platí, že $f_0 = 1$, $f_i = 0$ pro $i = 1, \dots, 6$ a rekurzí spočítáme váhový polynom

$$f_{\mathcal{C}} = 1 + 253x^7 + 506x^8 + 1288x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$$

T&N. Kód $\mathcal{C}$ je *dvojnásobně sudý*, jestliže 4 dělí $w(\mathbf{u})$ pro každé slovo $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$.

Poznámka 9.4. Nechť $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice $[n,k]_2$-kódu $\mathcal{C}$.

(1) $\mathcal{C}$ je samoortogonální, právě když $w(\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j)$ je sudá pro všechna i, j,
(2) samoortogonální kód $\mathcal{C}$ je dvojnásobně sudý, právě když 4 dělí $w(\mathbf{c}_i)$ $\forall i \leq k$.

Důkaz. (1) $\mathcal{C}$ je samoortogonální, právě když $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$ všechna i, j, což nastává právě když $2|w(\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j)$ pro všechna i, j.

(2) ($\Rightarrow$) Řádky matice $\mathbf{G}$ jsou kódová slova, proto je jejich váha dělitelná 4.

($\Leftarrow$) Pro všechna $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ existuje jediná množina $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, pro niž $\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{c}_i$. Označíme $\delta(\mathbf{u}) = |I|$ a dokážeme tvrzení, že 4 dělí $w(\mathbf{u})$, indukcí podle $\delta = \delta(\mathbf{u})$.

Pro $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ splňující $\delta(\mathbf{u}) = 0$ není co dokazovat, a pokud $\delta(\mathbf{u}) = 1$, pak existuje i splňující $\mathbf{u} = \mathbf{c}_i$, tedy $4|w(\mathbf{u})$ podle předpokladu.

Nechť tvrzení platí pro $\delta > 0$ a $\delta(\mathbf{u}) = \delta + 1$. Pak existuje $\mathbf{v}, \mathbf{c} \in \mathcal{C}$, pro něž $\delta(\mathbf{v}) = \delta$, $\delta(\mathbf{c}) = 1$ a $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$. Z indukčního předpokladu víme, že 4 dělí váhy $w(\mathbf{v})$ i $w(\mathbf{c})$, a protože $w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c})$ je sudá díky (1), dělí 4 váhu $w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{v} + \mathbf{c}) = w(\mathbf{v}) + w(\mathbf{c}) - 2w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c})$. □

Poznámka 9.5. $\mathcal{E}$ je samoduální dvojnásobně sudý $[24, 12, 8]_2$-kód a $\mathcal{G}$ je 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$-kód.

Důkaz. Označme si řádky matice E po řadě $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{12}$. Všimneme si, že $w(\mathbf{u}_1) = 12$ a využijeme předpoklad, že matice je N maticí $2 - (11, 6, 3)$ designu, abychom nahlédli, že $w(\mathbf{u}_i) = 8$, $w(\mathbf{u}_1 \cap \mathbf{u}_i) = 6$ pro všechna $i > 1$ a $w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) = 4$ pro všechna $i > j > 1$.

Ze sudosti hodnot $w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j)$ díky 9.4(1) plyne, že je $\mathcal{E}$, který obsahuje právě 2^{12} slov, samoduální a podle 9.4(1) i dvojnásobně sudý. Z vah $w(\mathbf{u}_i)$ okamžitě vidíme, že $d(\mathcal{E}) \leq w(\mathbf{u}_i) \leq 8$. Uvážíme nyní sporný předpoklad $d(\mathcal{E}) < 8$, z nějž pro dvojnásobně sudý kód plyne $d(\mathcal{E}) = 4$. To znamená, že existuje $I \subset \{1, \dots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = v_1 \dots v_{24} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i$ a $w(\mathbf{v}) = 4$. Potom $\mathbf{v} = i_I \cdot E$, a proto $1 < |I| \leq w(\mathbf{v}) = 4$. Vezmeme kontrolní matici $\mathcal{E}$ zajištěnou poznámkou 2.1:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & & N^T & & . & . & \dots & . \\ 1 & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{12} \end{pmatrix},$$

která je zároveň generující maticí samoduálního kódu $\mathcal{E}$. Její řádky $\tilde{\mathbf{u}}_i$ mají stejné vlastnosti jako slova $\mathbf{u}_i$, neboť rovněž N^T je incidenční matice symetrického $2 - (11, 6, 3)$ designu, proto existuje množina indexů $\tilde{I} \subset \{1, \dots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = \sum_{i \in \tilde{I}} \tilde{\mathbf{u}}_i$. Protože stejně jako v případě množiny I ani množina $\tilde{I}$ nemůže být jednoprvková, dostáváme, že $|\tilde{I}| = 4 - |I| > 1$, tudíž $|I| < 3$. Zjistili jsme, že $1 < |I| < 3$, proto $|I| = 2$ a tedy existují $i \neq j$, pro které

$$4 = w(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = w(\mathbf{u}_i) + w(\mathbf{u}_j) - 2w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j)) = 8,$$

což je spor. Dokázali jsme, že je $\mathcal{E}$ vzdálenosti 8

Protože $\mathcal{G}$ vznikne z $\mathcal{E}$ propíchnutím v 13. souřadnici, jedná se podle předchozího pozorování o 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$-kód. □

Věta 9.6. Až na permutační ekvivalenci existuje právě jeden $[24, 12, 8]_2$-kód, který je samoduální, dvojnásobně sudý a obsahuje slovo váhy 12. Kód je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ a jeho propíchnutí v kterékoli souřadnici je permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

Důkaz. Existence plyne z 9.5, slovo váhy je na prvním řádku generující matice E.

Nechť $[24, 12, 8]_2$-kód $\mathcal{C}$ splňuje předpoklady tvrzení a zvolme souřadnici i, v níž bude kód propichovat. Protože jsou váhy $\mathcal{C}$ sudé platí , že $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = 0$ pro každé $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, máme $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^\perp = \mathcal{C}$. Podle předpokladu existuje slovo $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy 12, proto $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{1} + \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ a $w(\mathbf{u}) = w(\tilde{\mathbf{u}}) = 12$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat (tj. permutujeme souřadnice, případně slova $\mathbf{u}$ a $\tilde{\mathbf{u}}$ vyměníme), že $i = 1$,

$$\mathbf{u} = 000000000000111111111111 \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{u}} = 111111111111000000000000.$$

Nyní uvážíme propíchnutí $\pi_I : \mathbb{F}_2^{24} \to \mathbb{F}_2^{12}$ v souřadnicích $I = \{13, \dots, 24\}$. Předpokládáme-li, že $\mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\pi_I(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, dostaneme $w(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + w(\mathbf{v}) = 12, w(\mathbf{v}) \geq 8$, a proto $w(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq 4$. Protože je kód vzdálenosti 8, vidíme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, tudíž $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ a o jádru restrikce $\pi_I|_{\mathcal{C}}$ obsahuje pouze slova $\mathbf{0}, \mathbf{u}$. Protože $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{c} = 0$ pro všechna slova $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ je $\pi_I(\mathcal{C})$ $[12, 11]_2$-kód s kontrolní maticí $\mathbf{1} \in \mathbb{F}_2^{1\times 12}$, tedy paritní kód. To znamená, že umíme zkonstruovat generující matici C kódu $\mathcal{C}$, na jejímž prvním řádku bude slovo $\mathbf{u}$, levý blok 11×12 pod ním bude tvořit generující matice paritního kódu a první sloupec zbývajícího pravého bloku můžeme vzít nulový, protože nulování případných nenulových hodnot přičtením prvního řádku matice nezmění prvních dvanáct sloupců C ani samotný kód $\mathcal{C}$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & & 0 & & & \\ . & & I_{11} & & . & & M & \\ 1 & & & & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Vyměníme-li nyní 1. a 13. sloupec matice C dostaneme, generující matici

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ . & . & \dots & . & . & & M & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix},$$

permutačně ekvivalentního kódu $\tilde{\mathcal{C}}$. Nyní stačí díky 9.3 ukázat, že je M incidenční matice $2-(11, 6, 3)$ designu.

Označme řádky matice $\tilde{C}$ po řadě $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_{11}$ a řádky matice M $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{11}$. Protože je $\mathcal{C}$ dvojnásobně sudý kód, 4 dělí $w(\mathbf{c}_i)$ i $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j)$ a $d(\mathcal{C}) = 8$ vidíme, že $w(\mathbf{v}_i), w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) \in \{6, 10\}$. Ukážeme, že připadá v úvahu pouze hodnota 6.

Kdyby $w(\mathbf{v}_i) = 10$, pak by $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_0) = 2 + 2 = 4$, z čehož plyne spor.

Kdyby $w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = 10$, pak by $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j + \mathbf{c}_0) = 2 + 2 = 4$, opět tedy dostáváme spor.

Proto pro $i \neq j$

$$6 = w(\mathbf{v}_i) = w(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = w(\mathbf{v}_i) + w(\mathbf{v}_j) - 2w(\mathbf{v}_i \cap \mathbf{v}_j),$$

z čehož plyne, že $w(\mathbf{v}_i \cap \mathbf{v}_j) = 3$. Totéž lze dokázat i pro matici M^T, neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & & M^T & & . & . & \dots & . \\ 1 & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je rovněž je generující matice samoduálního kódu $\tilde{\mathcal{C}}$.

Tedy M je incidenční matice symetrického $2-(11,6,3)$ designu, která je podle 9.3 určena až na permutaci řádků a sloupců jednoznačně. Nyní je už snadné nahlédnout že je původní kód permutačně ekvivalentní kódu $\mathcal{E}$ a jeho propíchnutí v libovolné předem zvolené souřadnici je permutačně ekvivalentní kódu $\mathcal{G}$. $\square$

Poznámka 9.7. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^{2k}$, kde $k = \log_2 |\mathcal{C}|$. Jestliže buď

(a) $\mathcal{C}$ je samoortogonální nebo
(b) $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ je pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ dvojnásobně sudý,

pak je $\mathcal{C}$ samoduální a tedy lineární kód.

Důkaz. Nechť platí (a). Pak $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{LO}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^\perp \subseteq (\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp$, proto $2^k = |\mathcal{C}| \leq |\mathrm{LO}(\mathcal{C})|$ a $\dim(\mathrm{LO}(\mathcal{C})) \geq k$. Uvážíme-li, že $\dim((\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp) \leq k$, vidíme, že $2^k = |\mathcal{C}| \leq |\mathrm{LO}(\mathcal{C})| \leq |(\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp| \leq 2^k$, čímž jsme ověřili, že $\mathcal{C} = \mathrm{LO}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^\perp$.

Předpokládejme, že platí (b), stačí nám ověřit platnost (a).

Všimněme si, že pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ plyne z předpokladů, že 4 dělí všechny tři hodnoty

$$w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{0}+\mathbf{u}), \quad w(\mathbf{v}) = w(\mathbf{0}+\mathbf{v}), \quad w(\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

Proto $2w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}) = w(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - w(\mathbf{u}) - w(\mathbf{v})$, tedy váha $w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v})$ je sudá a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ověřili jsme, že je $\mathcal{C}$ samoortogonální. $\square$

Věta 9.8. Až na permutační ekvivalenci existují jednoznačně určené binární kódy $\tilde{\mathcal{G}}$ a $\tilde{\mathcal{E}}$ velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo, první délky 23 a vzdálenosti 7 a druhý délky 24 a vzdálenosti 8. Tyto kódy jsou nutně lineární a platí, že $\tilde{\mathcal{G}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ a $f_{\mathcal{E}} = 1 + 759x^8 + 2576x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$.

Důkaz. Existence plyne z 9.5 a zbývá dokázat jednoznačnost.

Propíchnutí v i-té souřadnici $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ tvoří kód velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo, podle Pozorování jde o 3-perfektní kód vzdálenosti 7 s váhovým polynomem $f_{\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})} = 1+253x^7+506x^8+1288x^{11}+1288x^{12}+506x^{15}+253x^{16}+x^{23}$.

Protože pro každé $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ existují $j, k \leq 24$ splňující $w(\pi_j(\mathbf{u})) = w(\pi_k(\mathbf{u})) - 1$. Kód $\tilde{\mathcal{E}}$ neobsahuje slovo váhy 7, tedy všechna slova váhy 7 kódu $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ vznikla ze slov váhy 8. Kdyby $\tilde{\mathcal{E}}$ obsahoval slovo váhy 11, 15 nebo 23, pak by pro vhodné i obsahoval kód $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ slovo o jedna menší váhy, což neplatí. Podobně $\tilde{\mathcal{E}}$ nemůže obsahovat slova váhy 9, 13, ani 17, protože by v opačném případě obsahoval pro vhodné i kód $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ slova téže váhy. Proto $f_{\tilde{\mathcal{E}}} = 1+759x^8+2576x^{12}+759x^{16}+x^{24}$, tedy $\tilde{\mathcal{E}}$ je dvojnásobně sudý. Protože $\mathbf{v}+\tilde{\mathcal{E}}$ má stejné parametry jako $\tilde{\mathcal{E}}$, je to dvojnásobně sudý kód pro všechna $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{E}}$ a tedy je $\tilde{\mathcal{E}}$ lineární samoduální kód podle 9.7 a $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ podle 9.6.

Splňuje-li $\tilde{\mathcal{G}}$ předpoklady tvrzení, pak kód $\hat{\mathcal{E}} = \{c_1 \dots c_{23} \sum_i c_i \mid c_1 \dots c_{23} \in \tilde{\mathcal{G}}\}$ má délku 24 a vzdálenosti 8 mohutnosti 2^{12} slov a obsahuje $\mathbf{0}$, čehož plyne, že $\hat{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$. Protože $\pi_{24}(\hat{\mathcal{E}}) = \tilde{\mathcal{G}}$ je díky 9.6 permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

Zbytek plyne z poznámky 9.5. $\square$

Důsledek 9.9. Je-li $\mathcal{C}$ binární kód velikosti 2^{12} délky 23 a vzdálenosti 7, pak pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ je kód $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

Konvoluční kódy

10. Kódujme konvolučním kódem!

Zbývající kapitoly budou věnovány odlišnému konceptu kódování, kdy budeme pracovat nikoli s množinou přípustných kódových slov, nýbrž s množinou přípustných posloupností kódových slov, které budou kódovat všechny posloupnosti slov totálního kódu. V úvodní části nastíníme formalizaci problematiky a kromě základních pojmů konvolučního kódu a konvolučního kódovače, zavedeme klíčové nástroje jejich popisu. Na závěr kapitoly si uvědomíme, že naše definice fyzického konvolučního kódovače detailně popisuje jeho technickou realizaci jako elektrického obvodu.

V celé kapitole předpokládáme, že $\mathbb{F}$ je konečné těleso a D neznámá.

T&N. Na množině formálních *Laurentových řad* $\mathbb{F}((D)) = \{\sum_{i\geq r} u_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, u_i \in \mathbb{F}\}$ uvažujme obvyklé operace

$$\sum_{i\geq r} u_i D^i \pm \sum_{i\geq s} v_i D^i = \sum_{i\geq \min(r,s)} (u_i \pm v_i) D^i, \quad \sum_{i\geq r} u_i D^i \cdot \sum_{i\geq s} v_i D^i = \sum_{i\geq r+s} \sum_{k=r}^{i-s} u_k v_{i-k} D^i,$$

kde položíme $u_i = v_j = 0\ \forall i < r, j < s$. Dále značme:
$\mathbb{F}[[D]] = \{\sum_{i\geq 0} u_i D^i \mid u_i \in \mathbb{F}\}$ - formální *mocninné řady*,
$\mathbb{F}[D] = \{\sum_{i=0}^{n} u_i D^i \mid n \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{F}\}$ - *polynomy*,
$\mathbb{F}[D, D^{-1}] = \{\sum_{i=k}^{n} u_i D^i \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{F}\}$ - *Laurentovy polynomy.*

Poznámka 10.1. $\mathbb{F}((D))$ tvoří s výše zavedenými operacemi a konstantami 0 a 1 komutativní těleso a $\mathbb{F}[D]$, $\mathbb{F}[D, D^{-1}]$, $\mathbb{F}[[D]]$ jsou jeho podokruhy.

Důkaz. Obdobnými argumenty jako v případě oboru polynomů je snadné nahlédnout, že $\mathbb{F}((D))$ představuje komutativní okruh. Abychom ověřili, že jde o těleso, vezeme nenulový prvek $f \in \mathbb{F}((D))$. Potom existuje celé číslo d, mocninná řada $g \in \mathbb{F}[[D]]$ s nenulovým absolutním členem, pro kterou $f = D^d g$, a mocninná řada $h = \sum h_0 D^i$ s koeficienty danými rekurentním vztahem $h_n = g_0^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} h_i g_{n-i}$ pro počáteční podmínku $h_0 = g_0^{-1}$, která je inverzní k řadě g, a protože $g^{-1} = h$, vidíme, že $f^{-1} = D^{-d} h$.

Důkaz uzavřenost množin $\mathbb{F}[D]$, $\mathbb{F}[D, D^{-1}]$, $\mathbb{F}[[D]]$ na operace je zcela přímočarý a ponecháme ho čtenáři jako snadné cvičení. □

T&N. Prvkům podílového tělesa $\mathbb{F}(D) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{F}[D], q \neq 0\}$ oboru $\mathbb{F}[D]$ říkáme *racionální funkce*. Racionální funkce $f \in \mathbb{F}(D)$ je *realizovatelná*, pokud $f = \frac{p}{q}$ pro vhodný polynom p a polynom s nenulovým absolutním členem q.

Pozorování. Uvažujme zobrazení $\nu : \mathbb{F}(D) \to \mathbb{F}((D))$ dané vztahem $\nu(\frac{p}{q}) = p \cdot q^{-1}$.

(1) ν je dobře definovaný prostý okruhový homomorfismus,
(2) $f \in \mathbb{F}(D)$ je realizovatelná, právě když $\nu(f) \in \mathbb{F}[[D]]$

T&N. Nadále budeme ztotožňovat prvky $\mathbb{F}(D)$ a $\nu(\mathbb{F}(D))$ a prvkům $\nu(\mathbb{F}(D)) \cap \mathbb{F}[[D]]$ budeme říkat *realizovatelné řady.*

Pro $c \in \mathbb{N}$ označme $\mathbb{F}^c((D)) = \{\sum_{i\geq r} \mathbf{u}_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{F}^c\}$, kde souřadnice značíme horními indexy $\mathbf{u}_i = u_i^{(1)} \dots u_i^{(c)}$.

Pozorování. Pro $c \in \mathbb{N}$ platí, že

(1) zobrazení $\mu(\sum_{i\geq r} \mathbf{u}_i D^i) = (\sum_{i\geq r} u_i^{(1)} D^i, \dots, \sum_{i\geq r} u_i^{(c)} D^i)$ je bijekce $\mu : \mathbb{F}^c((D)) \to \mathbb{F}((D))^c$,
(2) $\mathbb{F}((D))^c$ představuje aritmetický vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{F}((D))$ a jeho strukturu můžeme pomocí bijekce μ přenést na množinu $\mathbb{F}^c((D))$, zobrazení μ se tak stane izomorfismem vektorových prostorů.

Na základě předchozího pozorování budeme nadále ztotožňovat prvky prostorů $\mathbb{F}^c((D))$ a $\mathbb{F}((D))^c$ prostřednictvím izomorfismu μ.

Definice. Je-li $B \subset \mathbb{F}(D)^c$, nazveme $\mathcal{C} = LO(B) \subseteq \mathbb{F}((D))^c$ *konvoluční kód* s parametry (c, k), pokud $\dim_{\mathbb{F}((D))} \mathcal{C} = k$. Každou matici $G \in (\mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]])^{k\times c}$, jejíž řádky tvoří bázi $\mathcal{C}$, nazveme *generující maticí* konvolučního kódu $\mathcal{C}$. Pokud $G \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$ mluvíme o *polynomiální* generující matici.

Poznámka 10.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}((D))^c$ konvoluční kód, pak

(1) existuje nějaká polynomiální generující matice $\mathcal{C}$,
(2) je-li $G = (g_{ij})$ generující matice $\mathcal{C}$, pak existují polynomy $p_{ij}, q_i \in \mathbb{F}[D]$, pro něž platí, že $q_i(0) = 1$, $\mathrm{nsd}(p_{i1}, \dots, p_{ic}, q_i) = 1$ a $g_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_i}$ $\forall i, j$,
(3) všechny polynomy z bodu (2) (a tedy i jejich stupně) jsou maticí G určeny jednoznačně.

Důkaz. (1) Nejprve zvolíme libovolnou bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ kódu $\mathcal{C}$ sestávající z prvků $\mathbb{F}(D)^c$. Pro ni existují polynomy $f_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{F}[D]$, $i \leq k$, $j \leq c$ splňující $\mathbf{b}_i = (\frac{f_{i1}}{q_{i1}}, \dots, \frac{f_{ic}}{q_{ic}})$ pro všechna i a položme $q = \mathrm{nsn}(q_{ij} \mid i \leq k,\ j \leq c)$ a $\mathbf{g}_i = q \cdot \mathbf{b}_i$. Odtud plyne, že $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix}$ je generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$.

(2) Nechť $g_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_{ij}}$ pro nesoudělné f_{ij} a q_{ij} a $q_{ij}(0) \neq 0$, což můžeme předpokládat, pro všechna i, j.

Pro každé i položme $\tilde{q}_i = \mathrm{nsn}(q_{ij} \mid j \leq c)$, dále $q_i = \frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_i(0)}$, což znamená, že $q_i(0) = 1$, a $p_{ij} = f_{ij}\frac{q_i}{q_{ij}}$ pro všechna $j = 1, \dots, c$. Ukážeme, že $\mathrm{nsd}(p_{i,1}, \dots, p_{i,c}, q_i) = 1$.

Předpokládejme, že existuje ireducibilní polynom r, který dělí všechny $p_{i,1}, \dots, p_{i,c}$ i q_i. Kdyby $r|f_{ij}$ pro všechna j, pak by r nedělilo q_{ij} pro žádné j, a tudíž by r nedělilo q_i, což je ve sporu s předpokladem. Nechť nyní $\emptyset \neq J = \{j \mid r \text{ nedělí} f_{ij}\}$. Potom $r \mid \frac{q_i}{q_{ij}}$, a proto $q_{ij}r \mid q_i$ pro všechna $j \in J$, tudíž r dělí $\frac{q_i}{\mathrm{nsn}(q_{ij}|j\in J)}$. Odtud plyne, že existuje $j \notin J$, pro něž r dělí q_{ij}, tudíž r nedělí f_{ij}, což je spor s volbou J.

(3) Zvolme i, j libovolně. Protože $\frac{f_{ij}}{q_{ij}} = \frac{p_{ij}}{q_i}$, dostáváme, že $q_i = q_{ij}\frac{p_{ij}}{f_{ij}}$, což je polynom, kde f_{ij} a q_{ij} jsou nesoudělné a $\frac{p_{ij}}{f_{ij}}$ je polynom. Tudíž q_i je společný násobek polynomů $q_{i1}, \dots, q_{ic}$. Budeme-li předpokládat, že existuje polynom r, který dělí $\frac{q_i}{\mathrm{nsn}(q_{i1},\dots,q_{ic})}$, pak r dělí polynom $\frac{q_i}{q_{ij}} = \frac{p_{ij}}{f_{ij}}\mathbb{F}[D]$, proto r dělí i p_{ij} pro všechna i, j, což je spor. Tím jsme dokázali, že q_i je až na skalární násobek určen jednoznačně a uvážíme-li konečně, že se absolutní člen polynomů q_i rovná 1, jsou všechny polynomy určeny jednoznačně. $\square$

T&N. Uvážíme-li vyjádření generující matice $G = (\frac{p_{ij}}{q_j})$ konvolučního kódu z 10.2(2), pak definujeme $\nu_i = \max(\deg(p_{i1}), \dots, \deg(p_{ic}), \deg(q_i))$ a hodnotu $\operatorname{extdeg}(G) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$ nazveme *vnější stupeň* matice G.

Věta 10.3. Jsou-li G a $\tilde{G}$ dvě generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s minimálním vnějším stupněm $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\nu}_i$, kde ν_i a $\tilde{\nu}_i$ jsou zavedeny stejně jako výše a $\nu_1 \le \dots \le \nu_k$ a $\tilde{\nu}_1 \le \dots \le \tilde{\nu}_k$, pak $\nu_i = \tilde{\nu}_i$ pro všechna $i = 1, \dots, k$.

Důkaz. Označme si řádky generujících matic $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix}$ a $\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_1 \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_k \end{pmatrix}$ a ke sporu předpokládejme, že existuje i, pro něž $\nu_i \ne \tilde{\nu}_i$. Vezměme nejmenší takové i a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\nu_i < \tilde{\nu}_i$. Doplníme-li nyní bázi $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i$ na bázi $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_{j_1}, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{j_{k-i}}$ konvolučního kódu $\mathcal{C}$ pomocí řádků generující matice $\tilde{G}$, což nám umožňuje Steinitzova věta o výměně, potom je matice $\hat{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_i \\ \tilde{\mathbf{g}}_{j_1} \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{g}}_{j_{k-i}} \end{pmatrix}$ rovněž generující maticí konvolučního kódu $\mathcal{C}$ a dostáváme

$$\operatorname{extdeg}(\hat{G}) = \sum_{s=1}^{i} \nu_s + \sum_{s=1}^{k-i} \tilde{\nu}_{j_s} \le \sum_{s=1}^{i} \nu_s + \sum_{s=i+1}^{k} \tilde{\nu}_s = \nu_i + \sum_{s \ne i} \tilde{\nu}_s < \sum_{s=1}^{k} \tilde{\nu}_s = \nu,$$

což je spor s minimalitou volby ν. □

Definice. Hodnotám ν_i z předchozí věty pro generující matici G kódu $\mathcal{C}$ s minimálním vnějším stupněm, se říká *Forneyho indexy* kódu a hodnota $\deg \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$, tedy minimální vnější stupeň mezi všemi generujícími maticemi, se nazývá *stupeň* konvolučního kódu $\mathcal{C}$.

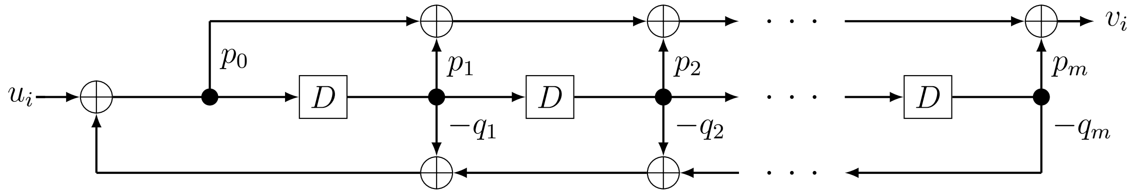
Je-li G generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s parametry (c, k), pak zobrazení $K : \mathbb{F}((D))^k \to \mathbb{F}((D))^c$ dané podmínkou $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}G$ nazveme *konvoluční kódovač* a dvojici (K, G) *fyzický konvoluční kódovač.*

Pozorování. Je-li (K, G) fyzický konvoluční kódovač pro $G = (\frac{p_{ij}}{q_i})$ generující matici konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s parametry (c, k) a $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$, pak

(1) $K(\mathbb{F}((D))^k) = \mathcal{C}$ a K je prosté lineární zobrazení,
(2) $\mathbf{v}^{(j)} = \sum_i \mathbf{v}_i^{(j)} D^i = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{u}^{(s)} \frac{p_{sj}}{q_s}$ pro $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i D^i = K(\mathbf{u})$.

V předchozím pozorování jsme si uvědomili, že fyzický konvoluční kódovač umíme vždy vyjádřit jako jistou konečnou posloupnost součtů konvolucí s realizovatelnou racionální funkcí. Následující znázornění konvoluce obvodem nepředstavuje jen formální zápis realizovatelné racionální funkcí pomocí schématu, nýbrž ukazuje, jak konvoluční kódovač „fyzicky"realizovat pomocí elektrotechnického obvodu, do nějž vstupuje jistou frekvencí posloupnost signálů hodnoty u_i, symbol $\boxed{D}$ představuje součástku zpožďující výstup proti vstupu o jednu časovou jednotku a $\oplus$ spolu ohodnocením hrany znamená přičtení násobku hodnoty na vstupu.

T&N. Jestliže $p = \sum_{i=0}^{m} p_i D^i, q = \sum_{i=0}^{m} q_i D^i \in \mathbb{F}[D]$, kde $m \geq \max(\deg p, \deg q)$, splňují předpoklady 10.2(2) (a tedy $q_0 = 1$), pak pro $u = \sum_{i\geq z} u_i D^i \in \mathbb{F}((D))$ a $v = \sum_{i\geq z} v_i D^i = u \cdot \frac{p}{q}$ následující schéma znamená, že je konvoluce $u \cdot \frac{p}{q}$ *realizována obvodem*:



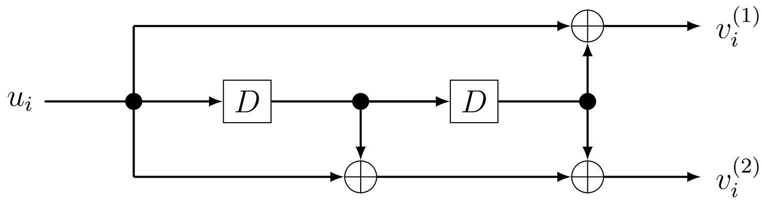
Za šablonu obvodu děkuji Adamu Klepáčovi.

Poznamenejme, že ohodnocení hrany nulou se obvykle znázorňuje vypuštěním hrany představující vodič (a příslušný čítač tak můžeme rovněž vypustit) a ohodnocení hodnotou 1 se vynechává. Pro společné vstupy navíc budeme často shodné části obvodů spojovat do jednoho schématu.

Příklad 10.4. Uvážíme fyzický konvoluční kódovač (K, G) pro generující matici $G = \begin{pmatrix} 1+D^2 & 1+D+D^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2[D]^{1\times 2}$. Pro vstup $u = \sum_i u_i D^i \in \mathbb{F}_2((D))$ tak vyjádříme

$$K(u) = \sum_i u_i D^i \begin{pmatrix} 1+D^2 & 1+D+D^2 \end{pmatrix} = (\sum_i (u_i + u_{i-2})D^i, \sum_i (u_i + u_{i-1} + u_{i-2})D^i).$$

Fyzický konvoluční kódovač ještě realizujme obvodem, v němž chybí „zpětná vazba" díky triviálnímu jmenovateli a naopak segment obsahující vstup a zpožďovače je pro oba obvody společný (jak by tomu opravdu bylo v případě fyzikální realizace):



11. Konvoluční kódovač: obvod nebo překladač?

Rozmyslíme si, že konvoluční kódovač můžeme pojmout jako jistý typ překladače, který nám díky znalosti hodnoty a stavu systému v daném časovém okamžiku umožní algoritmicky určit následující hodnoty a stavy. Vedle toho nahlédneme, jak naše pojem fyzického konvolučního kódovače souvisí s jeho algoritmickým pojetím.

Definice. Pro $n, k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $z \in \mathbb{Z}$ uvážíme čtveřici matic $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{k\times m}$, $R \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $S \in \mathbb{F}^{k\times n}$ určujících zobrazení

$$\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^m, \quad \lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$$

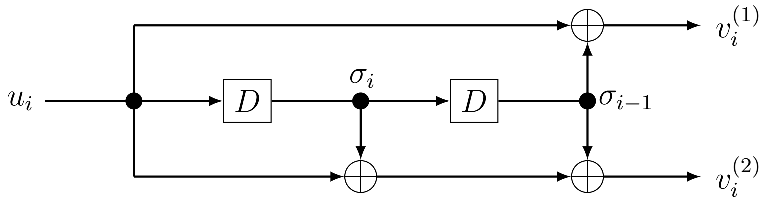
$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q, \quad \lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S.$$

Jestliže $u = \sum_{i \ge z} \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$ položme $\mathbf{s}_z = \mathbf{0} \in \mathbb{F}^m$ a dále pro všechna $i \ge z$

$$\mathbf{s}_{i+1} = \delta(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i), \quad \mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i), \quad K(u) = \sum_{i \ge z} \mathbf{v}_i D^i.$$

Je-li zobrazení K prosté, potom trojici (K, δ, λ) nazveme *abstraktní konvoluční kódovač* s *přechodovou* funkcí δ, *výstupní* funkcí λ, parametry (n, k, m) a *stavovým prostorem* $\mathbb{F}^m$.

Příklad 11.1. Označíme v obvodu z příkladu 10.4 σ_i a σ_{i-1} hodnoty po prvním a druhém použití zpožďovače $\boxed{D}$ v čase i (tedy v okamžiku, kdy máme na vstupu hodnotu u_i) a dvojici těchto hodnot označíme jako stav $\mathbf{s}_i = (\sigma_i, \sigma_{i-1})$:



Potom $\mathbf{s}_{i+1} = (\sigma_{i+1}, \sigma_i) = (u_i, u_{i-1}) = \mathbf{s}_i P + \mathbf{u}_i Q$ a

$$\mathbf{v}_i = (u_i + u_{i-2}, u_i + u_{i-1} + u_{i-2}) = (\sigma_{i-1}, \sigma_i + \sigma_{i-1}) + (u_i, u_i) = \mathbf{s}_i R + \mathbf{u}_i S$$

pro matice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, proto lze konvoluční kódovač K z 10.4 popsat jako abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) s parametry $(2, 1, 2)$, kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$.

Poznámka 11.2. Nechť pro $m \in \mathbb{N}$, $p = \sum_{i=0}^m p_i D^i \neq 0$, $q = 1 + \sum_{i=1}^m q_i D^i$ a máme zobrazení $K : \mathbb{F}((D)) \to \mathbb{F}((D))$ určené konvolucí $K(u) = u \cdot \frac{p}{q}$, tedy $(K, (\frac{p}{q}))$ je fyzický konvoluční kódovač. Zobrazení $\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \to \mathbb{F}^m$ a $\lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \to \mathbb{F}^1$ předpisy

$$\delta(\mathbf{s}, t) = (t - \sum_{j=1}^m q_j \mathbf{s}^{(j)}, \mathbf{s}^{(1)}, \ldots, \mathbf{s}^{(m-1)}) = \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} -q_1 & & & \\ \cdot & & I_{m-1} & \\ -q_{m-1} & & & \\ -q_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + u \cdot (1, 0, \ldots, 0)$$

$$\lambda(\mathbf{s}, t) = p_0 t + \sum_{j=1}^m (p_j - p_0 q_j) \mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} p_1 - p_0 q_1 \\ \ldots \\ p_m - p_0 q_m \end{pmatrix} + u \cdot p_0.$$

Potom je (K, δ, λ) abstraktní konvoluční kódovač.

Důkaz. Pro $u = \sum_{i \ge z} u_i D^i$ položme $\mathbf{s}_z = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_{i+1} = \delta(\mathbf{s}_i, u_i)$ a $\mathbf{v}_i = \lambda(\mathbf{s}_i, u_i)$ pro každé $i \ge z$. Definujeme-li $\sigma_i = \mathbf{s}_{i+1}^{(1)}$ a $\sigma = \sum_{i \ge z} \sigma_i D^i$ pak vidíme, že $\mathbf{s}_{i+1} = (\sigma_i, \sigma_{i-1}, \ldots, \sigma_{i-m+1})$, proto $\sigma_i = u_i - \sum_{j=1}^m q_j \sigma_{i-j}$ a tudíž $u_i = \sigma_i + \sum_{j=1}^m q_j \sigma_{i-j}$. Nyní snadno spočítáme konvoluce $\sigma \cdot q$ a $\sigma \cdot p$:

$$\sigma \cdot q = \sum_{i \ge z} (\sigma_i + \sum_{j=1}^m \sigma_{i-j} q_j) D^i = \sum_{i \ge z} u_i D^i = u,$$

$$\sigma \cdot p = \sum_{i \geq z} (\sum_{j=0}^{m} \sigma_{i-j} p_j) D^i = \sum_{i \geq z} (p_0 (u_i - \sum_{j=1}^{m} \sigma_{i-j} q_j) + \sum_{j=1}^{m} p_j \mathbf{s}_i^{(j)}) D^i =$$

$$= \sum_{i \geq z} (p_0 u_i + \sum_{j=1}^{m} (p_j - p_0 q_j) \mathbf{s}_i^{(j)}) D^i = v.$$

Odtud dostáváme, že $\frac{v}{p} = \sigma = \frac{u}{q}$, a proto $v = u\frac{p}{q}$ a $K(u) = v$. □

Věta 11.3. Abstraktní konvoluční kódovač lze realizovat jako fyzický konvoluční kódovač a naopak.

Důkaz. Předpokládejme, že (K, δ, λ) je abstraktní konvoluční s parametry (c, k, m) kódovač daný maticemi P, Q, R, S, tedy $\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{s}_i P + \mathbf{u}_i Q$ a $\mathbf{v}_i = \mathbf{s}_i R + \mathbf{u}_i S$ pro $u = \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i$, všechna $i \geq z$ a $\mathbf{s}_z = \mathbf{0}$. Položíme-li $s = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_i D^i$ a $v = \sum_{i \geq z} \mathbf{v}_i D^i$, pak

$$D^{-1} s = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_{i+1} D^i = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_i D^i P + \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i Q = sP + uQ.$$

To snadno upravíme na $uQ = sD^{-1}(I_m - DP)$, proto $s = uQ(I_m - DP)^{-1} D$, kde snadno spočítáme, že $(I_m - DP)^{-1} = \sum_{i \geq 0} P^i D^i$ je dobře definovaná mocninná řada, a proto je i realizovatelná. Navíc

$$v = \sum_{i \geq z} \mathbf{v}_i D^i = \sum_{i \geq z} \mathbf{s}_i D^i R + \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i S = sR + uS = u(S + Q(I_m - DP)^{-1} DR),$$

odkud plyne, že $G = DQ(I_m - DP)^{-1} R + S \in \mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]]$. To znamená, že $K(u) = uG$, a protože je K podle definice prosté, je G generující matice konvolučního kódu a tudíž tvoří dvojice (K, G) fyzický konvoluční kódovač.

Nyní předpokládejme, že $G = (\frac{p_{ij}}{q_i})_{ij} \in (\mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]])^{k \times c}$ je generující matice ve značení 10.2, pro niž $K(u) = uG$. Označíme $\nu_i = \max(\deg(p_{i1}), \ldots, \deg(p_{ic}), \deg(q_i))$, $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i = \operatorname{extdeg}(G)$, koeficienty polynomů $p_{ij} = \sum_{s=0}^{\nu_i} (p_{ij})_s D^s$ a $q_i = \sum_{s=0}^{\nu_i} (q_i)_s D^s$ a definujeme matice

$$P_i = \begin{pmatrix} -(q_i)_1 & & \\ . & I_{\nu_i - 1} & \\ -(q_i)_{\nu_i - 1} & & \\ -(q_i)_{\nu_i} & 0 \quad \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu_i \times \nu_i}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0_{\nu_1 \times \nu_2} & \ldots & 0_{\nu_1 \times \nu_k} \\ 0_{\nu_2 \times \nu_1} & P_2 & \ldots & 0_{\nu_2 \times \nu_k} \\ . & . & \ldots & . \\ 0_{\nu_k \times \nu_1} & 0_{\nu_k \times \nu_2} & \ldots & P_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu},$$

$$\mathbf{e}_{\nu_i} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^{\nu_i}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\nu_1} & 0_{1 \times \nu_2} & \ldots & 0_{1 \times \nu_k} \\ 0_{1 \times \nu_1} & \mathbf{e}_{\nu_1} & \ldots & 0_{1 \times \nu_k} \\ . & . & \ldots & . \\ 0_{1 \times \nu_1} & 0_{1 \times \nu_2} & \ldots & \mathbf{e}_{\nu_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times \nu},$$

$$R_i = \begin{pmatrix} (p_{i1})_1 - (p_{i1})_0 (q_i)_1 & \ldots & (p_{in})_1 - (p_{in})_0 (q_i)_1 \\ (p_{i1})_2 - (p_{i1})_0 (q_i)_2 & \ldots & (p_{in})_2 - (p_{in})_0 (q_i)_2 \\ . & \ldots & . \\ (p_{i1})_{\nu_i} - (p_{i1})_0 (q_i)_{\nu_i} & \ldots & (p_{in})_{\nu_i} - (p_{in})_0 (q_i)_{\nu_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu_i \times c}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ . \\ . \\ R_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times c}$$

a $S = \begin{pmatrix} (p_{11})_0 & \dots & (p_{1n})_0 \\ (p_{21})_0 & \dots & (p_{2n})_0 \\ . & \dots & . \\ (p_{k1})_0 & \dots & (p_{kn})_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k\times c}$. Nyní díky 11.2 s použitím definice násobení matic dostáváme, že (K, δ, λ) je pro $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P+\mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R+\mathbf{u}S$ abstraktní konvoluční kódovač. □

Důsledek 11.4. Je-li (K, δ, λ) abstraktní konvoluční kódovač s parametry (c, k, m), pak pro všechna $u \in \mathbb{F}((D))$ platí, že

(1) K je lineární zobrazení nad tělesem $\mathbb{F}$ a $K(uD) = K(u)D$,
(2) pokud $k = 1$, pak $K(u) = uK(1)$.

Poznamenejme, že vlastnost $K(uD) = K(u)D$ z bodu (1) se obvykle nazývá *časová invariance* a hodnota $K(1)$ *odezva* kódovače K. Lineární časově invariantní zobrazení daná odezvou, jíž bychom mohli zavést i pro vyšší dimenze, představují původní technický přístup k myšlence konvolučního kódovače a zde ho dále nebudeme rozvíjet, jen poznamenejme, že lze za jistého (netechnického) předpokladu spojitosti dokázat, že jde o koncept ekvivalentní našemu pojmu kódovače.

Příklad 11.5. (1) Aplikujme důkaz 11.3 na abstraktní konvoluční kódovač K z 11.1 s maticemi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom $\tilde{G} = D \cdot Q \cdot (I_2 - DP)^{-1} \cdot R + S =$

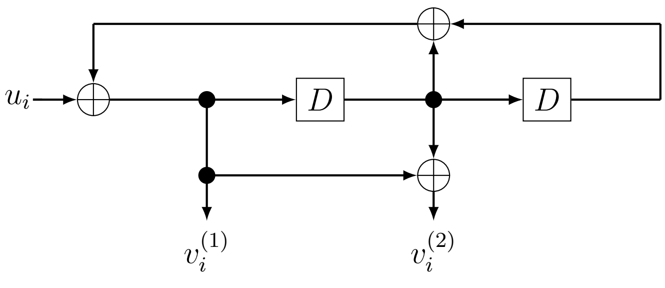
$$= D \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\tilde{G} = G$ z 10.4.

(2) Pro generujíc matici $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+D+D^2} & \frac{1+D}{1+D+D^2} \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ vidíme, že $\operatorname{extdeg} G = 2$ a pomocí důkazu předchozí věty spočítáme matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro fyzický kódovač $K(u) = uG$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 - 1 \cdot 1 & 1 - 1 \cdot 1 \\ 0 - 1 \cdot 1 & 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a snadno znázorníme obvod popisující daný fyzický konvoluční kódovač:



(3) Pro polynomiální matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 + D + D^2 & 1 + D^2 & 1 + D \\ 0 & 1 + D + D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ určíme $\operatorname{extdeg} G = 2+2 = 4$ a opět z důkazu předchozí věty spočítáme matice určující abstraktní

konvoluční kódovač pro fyzický kódovač $K(u) = uG$:

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{proto} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Pro generující matici $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1 & 0 & 1 & D \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ téhož konvolučního kódu jako v (2) opět spočítáme $\operatorname{extdeg} \tilde{G} = 2+1 = 3$ a matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro $\tilde{K}(u) = u\tilde{G}$:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Polynomiální generující matice

V této sekci se budeme věnovat hledání popisu minimálních kódování konvolučního kódu pomocí jistých algebraických vlastností generující matice. Polynomiální generující matici daného kódu, která bude disponovat těmito vlastnostmi a které budeme říkat kanonická matice. Odpovídající fyzický i abstraktní konvoluční kódovač, budeme navíc s to efektivně zkonstruovat.

V následujícím bude $\mathbb{F}$ značit konečné těleso a k a c přirozená čísla.

T&N. Nechť $A \in \mathbb{F}[D]^{c\times c}$ $C, M \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$. Řekneme, že je matice A *unimodulární*, pokud $\exists A^{-1} \in \mathbb{F}[D]^{c\times c}$. Jsou-li $L \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$ a $P \in \mathbb{F}[D]^{c\times c}$ unimodulární a $M = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \delta_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ pro monické nebo nulové polynomy $\delta_i \in \mathbb{F}[D]$ splňující podmínku $\delta_i | \delta_{i+1}$ pro všechna $i = 1, \dots, k-1$, pak $C = LMP$ nazveme *Smithův rozklad* matice C a M je *Smithova normální forma* (SNF) matice C.

Pozorování. Je-li $A \in \mathbb{F}[D]^{c\times c}$ a $p \in \mathbb{F}[D]$, pak

(1) A je unimodulární $\Leftrightarrow$ $\det A \in \mathbb{F}^*$,
(2) elementární matice přičtení p násobku řádku k jinému je unimodulární,
(3) jsou-li $a, b \in \mathbb{F}[D]$ nesoudělné, a proto existuje $u, v \in \mathbb{F}[D]$, pro něž $ua + bv = 1$, je matice $\begin{pmatrix} a & -v \\ b & u \end{pmatrix}$ unimodulární.

Důkaz následujícího tvrzení, který je založen na myšlence Gaussovy eliminace nad okruhem polynomů s využitím Eukleidova algoritmu a Bezoutových koeficientů, vynecháme.

Fakt 12.1. Polynomiální matice má nějaký Smithův rozklad a její SNF je určen jednoznačně.

Třebaže nebudeme formálně popisovat algoritmus hledání SNF, zkusíme ho v jednoduchých příkladech pomocí Pozorování najít:

Příklad 12.2. (1) Pro $A = \begin{pmatrix} 1+D & -D \\ D & 1-D \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{2\times 2}$ je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-D & D \\ -D & 1+D \end{pmatrix}$, tedy se jedná o unimodulární matici s determinantem $\det A = 1$. Potom SNF matice C je I_2 a její Smithův rozklad je například tvaru $A = A \cdot I_2 \cdot I_2 = I_2 \cdot I_2 \cdot A$.

(2) Hledáme Smithův rozklad matice $G = \begin{pmatrix} 1+D^2 & 1+D^3 & D+D^2 \\ 1+D & 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$. Nejprve přehodíme dva řádky a $(1+D)$ násobek nového prvního řádku přičteme k druhému a poté upravujeme pomocí sloupcových úprav:

$$G \sim \begin{pmatrix} 1+D & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & D+D^2 & 1+D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & D+D^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & 0 \end{pmatrix}$$

Snadno zaznamenáme inverzní úpravy k provedeným řádkovým a sloupcovým úpravám do matic

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+D & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+D & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+D \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D & 1 \\ 0 & D & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pro něž dostáváme Smithův rozklad

$$G = \begin{pmatrix} 1+D & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ 0 & 1+D & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1+D & 1 \\ 0 & D & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V následujícím uvažujme $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$ pro $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, \dots, g_{in}) \in \mathbb{F}[D]^c$ generující matici konvolučního kódu $\mathcal{C}$, tedy matici hodnosti k, kde $\nu_i = \deg \mathbf{g}_i := \max(\deg g_{i1}, \dots, \deg g_{ic})$.

T&N. *Vnitřní stupeň* matice G je hodnota

$$\operatorname{intdeg} G = \max\{\deg \det(H) \mid H \in \mathbb{F}[D]^{k\times k} \text{ vznikne vypuštěním } c-k \text{ sloupců z } G\}.$$

Pro $\tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$ platí, že $\tilde{G} \sim G$, pokud existuje $T \in \mathbb{F}(D)^{k\times k}$ invertibilní, pro kterou $TG = \tilde{G}$. Řekneme, že generující matice G je *základní*, pokud

$$\operatorname{intdeg} G = \min\{\operatorname{intdeg} \tilde{G} \mid \tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}, \tilde{G} \sim G\}.$$

Pozorování. Je-li $T \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$ a $\det(T) \neq 0$, pak

(1) $\operatorname{intdeg} G \leq \operatorname{intdeg} TG$, protože $\operatorname{intdeg} TG = \deg\det(T) + \operatorname{intdeg} G$, proto

(2) $\operatorname{intdeg} G = \operatorname{intdeg} TG \Leftrightarrow \deg\det(T) = 0 \Leftrightarrow T$ je unimodulární,

(3) $\operatorname{intdeg} G \leq \operatorname{extdeg} G$, protože existuje podmatice $M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \dots \\ \mathbf{m}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$ složená ze sloupců matice G, pro niž $\operatorname{intdeg} G = \deg\det(M) =$

$$= \deg \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \prod_i \mathbf{m}_i^{(\sigma(i))} \leq \max_{\sigma\in S_k}(\sum_i \deg \mathbf{m}_i^{(\sigma(i))}) \leq \sum_i \nu_i = \operatorname{extdeg} G.$$

Následující charakterizace je užitečná pro konstrukce základních matici.

Poznámka 12.3. Následující je pro matici G ekvivalentní:

(1) G je základní,
(2) SNF matice G je tvaru $(I_k \mid \mathbf{0})$,
(3) G lze doplnit $c-k$ polynomiálními řádky na unimodulární matici,
(4) $\exists R \in \mathbb{F}[D]^{c\times k}$, pro niž $GR = I_k$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Nechť $G = L(S|\mathbf{0})R$ je Smithův rozklad, kde $S = \operatorname{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_k) \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$ je diagonální čtvercová matice. Potom $G = LSR_1$ pro matici R_1, která vznikne z R vypuštěním posledních $c-k$ řádků, a proto podle Pozorování (1) platí, že

$$\operatorname{intdeg} G = \deg(\det(LS)) + \operatorname{intdeg} R_1 = \deg\det L + \deg\det S + \operatorname{intdeg} R_1.$$

Protože je G základní a $G \sim R_1$, dostáváme, že $\deg\det L = \deg\det S = 0$, což znamená, že $\delta_i = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, neboť je matice S hodnosti k.

(2) $\Rightarrow$ (3) Podle předpokladu existují matice $L \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$, $R_1 \in \mathbb{F}[D]^{k\times n}$ a $R_2 \in \mathbb{F}[D]^{(c-k)\times c}$, pro něž $G = L(I_k \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$. Nyní vidíme, že $\begin{pmatrix} G \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{c-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ je unimodulární matice.

(3) $\Rightarrow$ (4) Je-li $C \in \mathbb{F}[D]^{(c-k)\times c}$ matice, pro niž je $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}$ unimodulární, pak existují matice $H_1 \in \mathbb{F}[D]^{c\times k}$ a $H_2 \in \mathbb{F}[D]^{c\times(c-k)}$, pro které platí, že $\begin{pmatrix} G \\ C \end{pmatrix}(H_1 \mid H_2) = I_c$. Potom $GH_1 = I_k$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Nechť $GR = I_k$ pro nějakou matici $R \in \mathbb{F}[D]^{c\times k}$. Zvolme $T \in \mathbb{F}(D)^{k\times k}$, pro kterou $TG \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$. Potom i $T = TGR \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$ a proto podle Pozorování (1) platí, že $\operatorname{intdeg} G \leq \operatorname{intdeg} TG$, proto je G základní. $\square$

T&N. Řekneme, že je G *redukovaná*, pokud

$$\operatorname{extdeg} G = \min\{\operatorname{extdeg} TG \mid T \in \mathbb{F}[D]^{k\times k} \text{ je unimodulární}\}.$$

Označíme-li $\overline{g}_{ij}$ koeficient termu D^{ν_i} polynomu $\mathbf{g}_i^{(j)}$ v G, pak $\overline{G} = (\overline{g}_{ij})_{ij} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ se nazývá *matice nejvyšších koeficientů*.

Poznámka 12.4. Následující je pro matici G ekvivalentní:

(1) G je redukovaná,
(2) $\operatorname{rank} \overline{G} = k$,
(3) $\operatorname{intdeg} G = \operatorname{extdeg} G$.

Důkaz. (1) ⇒ (2) Tvrzení dokážeme nepřímo a budeme předpokládat, že rank $\overline{G} < k$, což znamená, že existuje vektor nenulový $\mathbf{y} \in \mathbb{F}^k$, pro který $\mathbf{y}\overline{G} = \mathbf{0}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_k$, zvolíme $s \leq k$ největší takové, že $\mathbf{y}^{(s)} \neq 0$ a definujeme polynom $\tilde{\mathbf{g}}_s = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{y}^{(j)} D^{\nu_s - \nu_j} \mathbf{g}_j$. Protože mají všechny sčítance stupeň právě ν_s a koeficienty termu D^{ν_s} polynomiálního vektoru $\tilde{\mathbf{g}}_s$ se vynulují, dostáváme, že $\deg \tilde{\mathbf{g}}_s < \nu_s$. Vytvoříme-li nyní matici T z jednotkové matice stupně k tak, že nahradíme její s-tý řádek řádkem $(\mathbf{y}^{(1)} D^{\nu_s-\nu_1}, \mathbf{y}^{(2)} D^{\nu_s-\nu_2}, \ldots, \mathbf{y}^{(s)} D^{\nu_s-\nu_s}, 0 \ldots, 0)$, platí, že $\det T = \mathbf{y}^{(s)} \in \mathbb{F}^*$, a tudíž jde o unimodulární matici. Protože matice TG vznikne z G právě nahrazením s-tého řádku vektorem $\tilde{\mathbf{g}}_s$, vidíme, že

$$\operatorname{extdeg} TG = \deg \tilde{\mathbf{g}}_s + \sum_{j \neq s} \nu_j < \sum_{j=1}^{k} \nu_j = \operatorname{extdeg} G,$$

proto matice G není redukovaná.

(2) ⇒ (3) Protože rank $\overline{G} = k$, existuje čtvercová matice $M \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$ vzniklá vypuštěním vhodných $n-k$ sloupců G tak, aby platilo, že $\det \tilde{M} \neq 0$ pro matici $\tilde{M}$, která vznikne z matice $\overline{G}$ vypuštěním týchž sloupců jako u matice M. Protože

$$\operatorname{intdeg} M \leq \operatorname{extdeg} M \leq \operatorname{extdeg} G$$

a $\det \tilde{M}$ je nenulový koeficient u $D^{\operatorname{extdeg} G}$, vidíme, že

$$\operatorname{extdeg} G \leq \operatorname{intdeg} M \leq \operatorname{intdeg} G,$$

tudíž $\operatorname{extdeg} G = \operatorname{intdeg} G$.

(3) ⇒ (1) Pro každou unimodulární matici T platí, že $\operatorname{intdeg} G = \operatorname{intdeg} TG$ díky Pozorování (2), proto

$$\operatorname{extdeg} G = \operatorname{intdeg} G = \operatorname{intdeg} TG \leq \operatorname{extdeg} TG,$$

odkud už podle definice plyne, že je G je redukovaná. □

Definice. Řekneme, že je G *kanonická*, je-li základní a redukovaná.

Věta 12.5. Generující matice G konvolučního kódu $\mathcal{C}$ je kanonická právě tehdy, když $\operatorname{extdeg} G = \deg \mathcal{C}$.

Důkaz. Zvolme dvě takové polynomiální matice $\hat{G}, G'$, že $\hat{G}$ je nejmenšího možného vnitřního stupně splňující $G \sim \hat{G}$ a G' je nejmenšího možného vnějšího stupně splňující $G \sim \hat{G}$. Poznamenejme, že díky 10.2 můžeme vzít matici minimálního vnějšího stupně polynomiální, proto $\operatorname{extdeg} G' = \deg \mathcal{C}$. Protože podle Pozorování (3)

$$\operatorname{intdeg} G' \leq \operatorname{extdeg} G' = \deg \mathcal{C},$$

plyne z minimality volby $\operatorname{intdeg} \hat{G}$, že rovněž $\operatorname{intdeg} \hat{G} \leq \deg \mathcal{C}$. Protože existuje unimodulární matice $T \in \mathbb{F}[D]^{k \times k}$, pro niž má matice $T\hat{G}$ nejmenší možný vnější stupeň, tedy se jedná o redukovanou matici , platí díky Pozorování (2), že

$$\operatorname{intdeg} T\hat{G} = \operatorname{intdeg} \hat{G} \leq \deg \mathcal{C} \leq \operatorname{extdeg} T\hat{G}.$$

Protože je $T\hat{G}$ redukovaná, díky 12.4 platí, že $\operatorname{intdeg} T\hat{G} = \operatorname{extdeg} T\hat{G} = \deg \mathcal{C}$. Protože je T unimodulární

$$\deg \mathcal{C} = \operatorname{intdeg} T\hat{G} = \operatorname{intdeg} \hat{G} \leq \operatorname{intdeg} G \leq \operatorname{extdeg} G.$$

Odtud vidíme, že $\deg \mathcal{C} = \operatorname{extdeg} G$, právě když jsou všude v předchozí nerovnosti rovnosti. Nyní si stačí všimnout, že $\deg \mathcal{C} = \operatorname{intdeg} G$, právě když je G základní přímo z definice a $\operatorname{intdeg} G = \operatorname{extdeg} G$, právě když je G redukovaná podle 12.4. $\square$

Příklad 12.6. (1) Matice $G = \begin{pmatrix} D & 1 + D^2 \end{pmatrix}$ má SNF tvaru $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, neboť D a $1 + D^2$ jsou nesoudělné, proto je G podle 12.3 základní. Dále $\overline{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, proto je G podle 12.4 redukovaná, tudíž je kanonická.

(2) Čtvercová matice je základní, právě když je unimodulární.

Čtvercová matice G je kanonická, právě když je G unimodulární a $\operatorname{extdeg} G = \operatorname{intdeg} G$, což nastává právě tehdy, když $G \in \mathbb{F}^{k \times k}$ je regulární.

O stupni konvolučního kódu (a tedy vnějším i vnitřním stupni každé jeho kanonické generující matice) se dá dále dokázat, že se rovná dimenzi takzvaného prostoru abstraktních stavů, která je nejmenší možnou dimenzí stavového prostoru pro jakoukoli jeho realizaci abstraktním konvolučním kódovačem.

To znamená, že stavový prostor abstraktního konvolučního kódovače, který sestrojíme pomocí kanonické matice a věty 11.3 nabývá minimální možné dimenze.

13. Viterbiho dekódování

Na závěr nabídneme dvě těsně související prezentace abstraktního konvolučního kódovače pomocí multigrafů. Postupné procházení jejich cest po vrstvách odpovídajícím jednotlivým časovým okamžikům kódování nám poskytne velmi přirozený a efektivní dekódovací algoritmus, který najde vstupní posloupnost s nejvyšší pravděpodobností podmíněnou předpokladem přijetí konkrétní chybové posloupnosti, tedy tu, jejíž zakódování je v Hammingově metrice nejblíže přijaté posloupnosti.

V celé kapitole uvažujeme abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) se stavovým prostorem $S = \mathbb{F}^m$ a konvolučním kódovačem $K : \mathbb{F}((D))^k \to \mathbb{F}((D))^c$. Dále označme $q = |\mathbb{F}|$, tedy $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$.

T&N. *Multigrafem konvolučního kódovače* (K, δ, λ) budeme rozumět orientovaný ohodnocený multigraf (což je přímočaré zobecnění pojmu graf připouštějící více hran mezi stejnými vrcholy) s vrcholy danými množinou S, jehož ohodnocené hrany jsou právě tvaru

$$\boxed{s} \xrightarrow[\mathbf{u}/\lambda(s,\mathbf{u})]{} \boxed{\delta(s,\mathbf{u})}$$

pro všechna $s \in S$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$.

Mřížoví (*trellis diagram*) konvolučního kódovače (K, δ, λ) je nekonečný ohodnocený orientovaný multigraf s vrcholy $\{(\mathbf{0}, 0)\} \cup S \times \mathbb{N}$, jehož ohodnocené hrany jsou právě tvaru

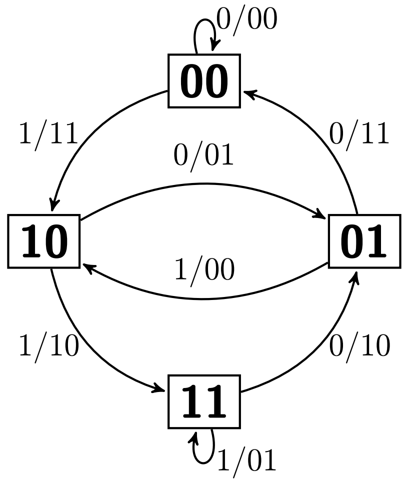
$$\boxed{\mathbf{s,j}} \xrightarrow{\mathbf{u}/\lambda(s,\mathbf{u})} \boxed{\delta(s,\mathbf{u}),\ \mathbf{j+1}},$$

pokud do vrcholu (s, j) vede nějaká hrana nebo $(s, j) = (\mathbf{0}, 0)$. Je-li $j \geq 0$, pak se úplný podgraf mřížoví sestávající z hran začínajících ve vrcholech (s, j) pro libovolné $s \in S$ nazývá *j-tou vrstvou mřížoví.*

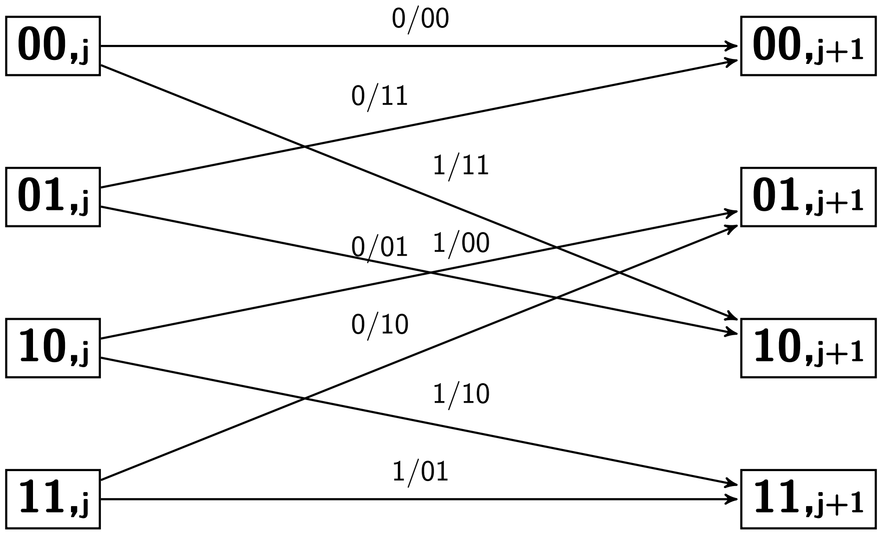
Příklad 13.1. Konvoluční kódovač z příkladů 10.4, 11.1 a 11.5(1), kde pro $S = \mathbb{F}_2^2$ máme

$$\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{u}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

popíšeme následujícím multigrafem



Příklad 13.2. Pro konvoluční kódovač z předchozího příkladu máme j-tou vrstvu mřížoví pro každé $j > 1$ ve tvaru



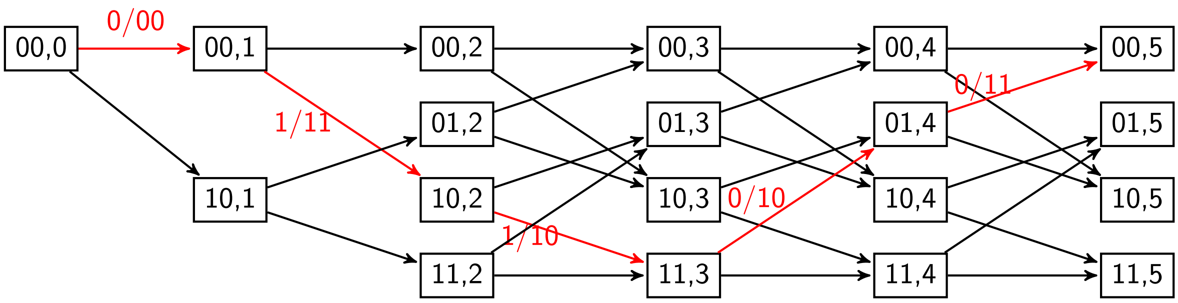
Nyní zakódujme polynom $\mathbf{u} = D + D^2$ a obdržíme $\mathbf{v} = K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(1 + D^2, 1 + D + D^2) =$

$$= (D + D^2 + D^3 + D^4, D + D^4) \sim 00D^0 + 11D^1 + 10D^2 + 10D^3 + 11D^4,$$

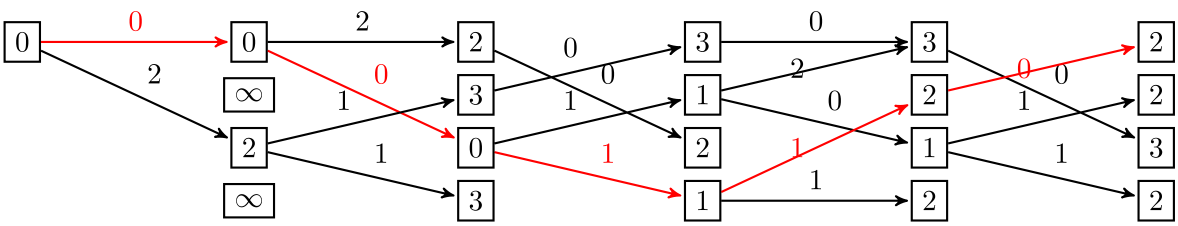
které reprezentuje posloupnost $(00, 11, 10, 10, 11)$. Přijmeme-li posloupnost s dvěma bitovými chybami $\mathbf{y} = (00, 11, 1\mathbf{1}, \mathbf{0}0, 11)$, která odpovídá polynomu

$$y = 00D^0 + 11D^1 + 11D^2 + 00D^3 + 11D^4,$$

snažíme se ji aproximovat „nejbližší” ohodnocenou cestou v mřížoví tj. hledáme takové $\hat{\mathbf{u}}$, aby $P[\mathbf{y} \mid K(\hat{\mathbf{u}})]$ byla minimální, tj. aby byl minimální součet $\sum d(\mathbf{y}_i, K(\mathbf{u})_i)$:



Zapíšeme si do grafu součet vzdáleností přijaté dvojice bitů a dvojici z kódové posloupnosti, což je myšlenka dekódovacího algoritmu, který následně popíšeme. V každém stavu v každé vrstvě vybereme ty hrany, které prodlužují dosavadní minimální cestu, která do tohoto stavu vede, tak, aby byla cesta opět minimální:



Ačkoli do vrcholů v čase 5 vedou tři cesty s váhou 2, vybereme tu, která končí ve stavu 00, neboť ta reprezentuje polynom stupně 4, což je parametr polynomu, o němž víme, že ho máme přijmout, ostatní cesty totiž reprezentují polynom vyššího stupně a vyšší váhy.

Nadále bude značit $\mathcal{M} = (\{(\mathbf{0}, 0)\} \cup S \times \mathbb{N}, H)$, kde H představuje množinu hran, mřížoví konvolučního kódovače (K, δ, λ).

Pozorování. Pro $\mathcal{M}$ platí, že

(1) vrstva mřížoví (K, δ, λ) je bipartitní ohodnocený orientovaný multigraf, který obsahuje nejvýše $|S| = |\mathbb{F}_q^m| = q^m$ počátečních i koncových vrcholů a nejvýše $|S| \cdot |\mathbb{F}_q^k| = q^{m+k}$ hran,
(2) orientovaná cesta $h_0 h_1 h_2 \ldots$ s ohodnocením hrany h_i tvaru $\mathbf{u}_i/\mathbf{v}_i$ reprezentuje kódování $\sum_{i\geq 0} \mathbf{v}_i D^i = K(\sum_{i\geq 0} \mathbf{u}_i D^i)$.

T&N. Nechť $s \in S$, $l \in \mathbb{N}$, $P = h_1 \ldots h_l \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, kde $h_i \in H$ a $\mathcal{P}_l(\mathcal{M})$ značí množinu všech orientovaných cest délky l. Označme $i(P)$ počáteční vrchol a $t(P)$ koncový vrchol. Pro $y = \sum \mathbf{y}_i D^i \in \mathbb{F}^c[[D]]$ definujme hodnotu $\mu_y(P) = \sum_{i=1}^{l} \mu_y(h_i)$, kde $\mu_y(h_i) = d(\mathbf{y}_i, \lambda(s, \mathbf{u}))$ je Hammingova vzdálenost pro hranu h_i tvaru

$$\boxed{\text{s,i}} \xrightarrow{\mathbf{u}/\lambda(s,\mathbf{u})} \boxed{\delta(s,\mathbf{u}),\ \text{i+1}}$$

Konečně řekneme, že je cesta P *minimální pro* y, pokud

$$\mu_y(P) = \min\{\mu_y(Q) \mid Q \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M}) : i(Q) = i(P), t(Q) = t(P)\}.$$

Nyní už máme zavedeny všechny nástroje, abychom mohli formalizovat postup dekódování z příkladu 13.2.

```
VITERBIHO ALGORITMUS
Vstup: f ∈ ℕ, z ∈ S, y ∈ 𝔽^c[[D]]
Výstup: P ∈ 𝒫_f(ℳ) minimální cesta pro y, kde i(P) = (0,0) a t(P) = (z,f)
 0. for j = 0 to f & for all s ∈ S polož μ(s,j) := ∞;
 1. μ(0,0) := 0; P(0,0) := prázdná cesta;
 2. for j = 1 to f do
         for h ∈ H & s ∈ S splňující μ(s,j−1) < ∞ & i(h) = (s,j−1) do
               if μ_y(h) + μ(s,j−1) < μ(t(h)) then
                    {P(t(h)) := P(s,j−1)h; μ(t(h)) := μ_y(h) + μ(s,j−1);
                    }
 3. return P(z,f)
```

Dekódování

Pro přijatou (poškozenou) posloupnost slov, kterou interpretujeme jako polynom $y = \sum_{j=0}^{f-1} \mathbf{y}_j$ najdeme Viterbiho algoritmem orientovanou cestu $P = h_1 \dots h_{f-1}$ s hranou h_i ohodnocenou dvojicí $\mathbf{u}_i/\mathbf{v}_i$ pro $i = 1, \dots, f-1$, která splňuje, že $t(P) = (z, f)$ pro vhodný stav $z \in S$ (ne nutně musí jít o stav $\mathbf{0}$, otázkou volby vhodného stavu se zde ovšem zabývat nebudeme). Hledaný vzor $u = \sum_{i=0}^{f-1} \mathbf{u}_i$, který přečteme z ohodnocení hran nalezené cesty P, minimalizuje vzdálenost $\sum_{j=0}^{f-1} d(\mathbf{y}_j, \mathbf{v}_j)$ pro polynom $v = \sum_{i=0}^{f-1} \mathbf{v}_i$, obsahující prvních f členů mocninné řady $K(u)$.

Na závěr si rozmyslíme, že Viterbiho algoritmus skutečně najde v Hammingově smyslu nejbližší cestu (a následné dekódování je tak ML-schématem).

Pozorování. Nechť $l, r \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{F}^c[[D]]$, $P \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, $Q \in \mathcal{P}_r(\mathcal{M})$ a $i(Q) = t(P)$.

(1) Pokud $i(P) = (s, j)$, pak existuje $\tilde{s} \in S$, pro které $t(P) = (\tilde{s}, j + l)$,
(2) $\mu_y(PQ) = \mu_y(P) + \mu_y(Q)$,
(3) je-li PQ minimální cesta pro y, pak P i Q jsou minimální cesty pro y.

Poznámka 13.3. Nechť $y \in \mathbb{F}^c[[D]]$, $l \in \mathbb{N}$ a $s \in S$. Označme pro každé $z \in S$ minimální cestu $P_z \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$ pro y splňující $i(P_z) = (\mathbf{0}, 0)$ a $t(P_z) = (z, l)$, dále seřaďme $h_1, \dots, h_r \in H$ všechny ohodnocené hrany splňující $i(h_j) = (s_j, l)$ pro nějaké $s_j \in S$. Pokud $i = \arg\min_j(\mu_y(P_{s_j}) + \mu_y(h_j))$, pak je $P_{s_i} h_i$ minimální cesta pro y.

Důkaz. Vezměme cestu $P \in \mathcal{P}_{l+1}(\mathcal{M})$, která splňuje $i(P) = (\mathbf{0}, 0)$ a $t(P) = (s, l + 1)$. Potom existuje j a cesta $Q \in \mathcal{P}_l(\mathcal{M})$, pro něž platí $i(Q) = (\mathbf{0}, 0)$, $t(Q) = (s_j, l)$ a $P = Qh_j$. Z Pozorování (2) potom plyne, že

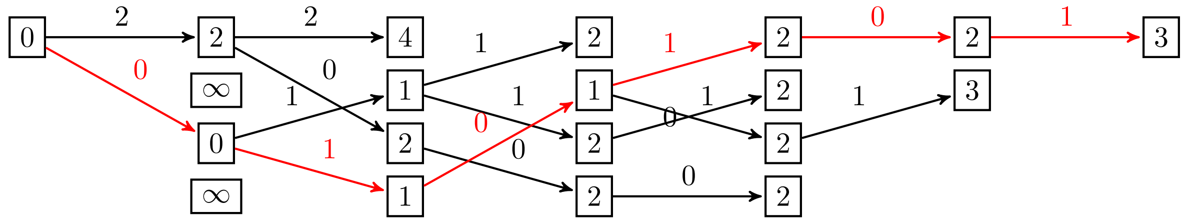
$$\mu_y(P) = \mu_y(Q) + \mu_y(h_j) \geq \mu_y(P_{s_j}) + \mu_y(h_j) \geq \mu_y(P_{s_i}) + \mu_y(h_i) = \mu_y(P_{s_i} h_i),$$

což znamená, že $\mu_y(P_{s_i} h_i)$ je minimální možné a to jsme potřebovali dokázat. □

Věta 13.4. Viterbiho algoritmus pracuje správně v čase $O(fq^{m+k})$ operací v $\mathbb{Z}$.

Důkaz. Korektnost plyne z 13.3 a časový odhad dostáváme aplikací pozorování o počtu vrcholů a hran jedné vrstvy. □

Příklad 13.5. Pro konvoluční kódovač z příkladů 13.1 a 13.2 uvažujme přijatou posloupnost popsanou polynomem $y = 11D^0 + 11D^1 + 10D^2 + 01D^3 + 00D^4 + 01D^5$, o němž předpokládáme, že vznikl (omezeným) poškozením polynomu v stupně nejvýše 3 a budeme Viterbiho algoritmem hledat polynom $v = K(u)$ i původní zprávu u tak, abychom v čase 5 skončili ve stavu **0**. Za využití 13.2 budeme průběh Viterbiho algoritmu zapisovat do následujícího multigrafu:



Vyznačená cesta odpovídá kódovému polynomu

$$v = 11D^0 + 10D^1 + 10D^2 + 11D^3 + 00D^4 + 00D^5,$$

který je obrazem zdrojového polynomu $u = 1D^0 + 1D^1 + 0D^2 + 0D^3$.