Opakování

Opakování: Testy o střední hodnotě normálního rozdělení

1. jednovýběrový t-test
2. párový t-test
3. dvouvýběrový t-test

Neparametrické testy

- jednovýběrový Wilcoxonův test
- párový Wilcoxonův test
- dvouvýběrový Wilcoxonův test

Neparametrické testy

t-testy:

- hypotézy o populačním průměru (střední hodnoty)
- předpoklad normality

Neparametrické testy

- není nutné specifikovat přesný typ rozdělení
- často jsou založeny na tzv. pořadích $\rightsquigarrow$ tzv. pořadové testy
- obecnější hypotézy — rovnost mediánů, shoda celých rozdělení apod.
- v případě normálního rozdělení menší síla ve srovnání s t-testy

Pořadí

- pozorování $Y_1, \dots, Y_n$ ze spojitého rozdělení
- uspořádaný výběr (varianční řada)

$$Y_{(1)} \leq \dots Y_{(n)}$$

hodnoty uspořádané dle velikosti od minima po maximum

- pořadí: $R_1, \dots, R_n$
  $R_i \leftrightsquigarrow$ kterém místě v uspořádaném výběru veličina Y_i stojí
  (v případě shod se berou průměry z odpovídajících pořadí)

Příklad

- máme hodnoty $7, 4, 5, 13, 2$
- uspořádaný výběr $2, 4, 5, 7, 13$
- pořadí $4, 2, 3, 5, 1$

Jednovýběrový Wilcoxonův test

Situace: $X_1, \dots X_n$ výběr ze spojitého rozdělení symetrického kolem bodu a (tj. $a = m_X$ medián X), chceme testovat

$$H_0 : m_X = m_0, \quad \text{proti } H_1 : m_X \neq m_0$$

Postup

- vyloučíme případy $X_i = m_0$ (a dle toho upravíme n)
- definujeme $Y_i = X_i - m_0$
- uspořádáme $|Y_i|$ dle velikosti
- R_i^+ pořadí $|Y_i|$
- za H_0 by součty R_i^+ pro kladná a záporná Y_i měly být srovnatelné
  (je-li např. součet pro kladná Y_i výrazně větší než pro záporná $\rightsquigarrow$ svědčí to pro $m_X > m_0$)

Jednovýběrový Wilcoxonův test

Přesný test:

- testová statistika: W součet pořadí R_i^+ pro $Y_i > 0$

$$W = \sum_{i:Y_i>0} R_i^+$$

- nulovou hypotézu zamítáme pro velké nebo malé hodnoty W
- kritické hodnoty $\rightsquigarrow$ statistický software

Asymptotický test:

- testová statistika

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

  za H_0 má Z přibližně $\mathrm{N}(0,1)$ rozdělení
- H_0 zamítáme, pokud

$$|Z| > u_{1-\alpha/2}$$

Jednostranné alternativy

$H_0 : m_X = m_0$ vs. $H_1 : m_X > m_0$

- zamítáme pro velké hodnoty W, tj. pro velké Z

$$Z > u_{1-\alpha}$$

$H_0 : m_X = m_0$ vs. $H_1 : m_X < m_0$

- zamítáme pro malé hodnoty W, tj. pro malé Z

$$Z < -u_{1-\alpha}$$

Poznámky

- k zamítnutí H_0 může vést také výraznější porušení předpokladu symetrie (přestože třeba $m_X = m_0$)
- v případě výskytu shod $X_i = m_0$ $\rightsquigarrow$ lze korekce ve jmenovateli pro Z
- řada programů počítá s korekcí pro spojitost (korekce asymptotického testu pro konečné n)

Příklad — pivo

Příklad

Provádíme průzkum, jaký skutečný objem piva točí v nejmenované hospodě. Zakoupeno bylo 10 piv a jejich objem byl (v litrech):

$$0.510,\ 0.462,\ 0.491,\ 0.466,\ 0.461,\ 0.503,\ 0.495,\ 0.488,\ 0.512,\ 0.505.$$

Chceme otestovat, zda hostinský netočí pod míru.

Použijeme popsaný postup:

X_i	0.51	0.462	0.491	0.466	0.461	0.503	0.495	0.488	0.512	0.505
Y_i	0.01	-0.038	-0.009	-0.034	-0.039	0.003	-0.005	-0.012	0.012	0.005
$\lvert Y_i \rvert$	0.01	0.038	0.009	0.034	0.039	0.003	0.005	0.012	0.012	0.005
R_i^+	5	9	4	8	10	1	2.5	6.5	6.5	2.5

$W = 5 + 1 + 6.5 + 2.5 = 15$

Příklad — řešení

- $W = 5 + 1 + 6.5 + 2.5 = 15$
- testová statistika: $Z = -1.274$, tj. $Z > -u_{0.95} = -1.645 \rightsquigarrow$ nelze zamítnou H_0

Provedení v programu R:

```
> wilcox.test(x,mu=0.5,alternative=‘‘less’’,
    exact=F,corr=F)
Wilcoxon signed rank test
data: pivo
V = 15, p-value = 0.101
alternative hypothesis: true location is less than 0.5
```


Párový Wilcoxonův test

Situace: Párová pozorování $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, zajímá nás, zda jsou veličiny X a Y co do polohy stejné

- na každém subjektu měříme dvě veličiny $\leftrightsquigarrow$ jejich porovnání
- příklady: věk rodičů, síla stisku levé a pravé ruky, hmotnost před a po dietě, ...

Postup

- zavedeme $Z_i = X_i - Y_i$
- budeme chtít testovat, zda Z_i kolísají kolem nuly, tj. zda $m_Z = 0 \rightsquigarrow$ problém převeden na jednovýběrový případ (analogie párového t-testu, ale teď bez normality)

Párový Wilcoxonův test

- mají-li $Z_1, \dots, Z_n$ normální rozdělení $\rightsquigarrow$ t-test
- porušení normality $\rightsquigarrow$ jednovýběrový Wilcoxonův test předpoklad: $Z_1, \dots, Z_n$ spojité symetrické rozdělení

Postup:

↪ vyloučíme případy $Z_i = 0$
↪ určíme pořadí R_i^+ absolutních hodnot $|Z_i|$
↪ W součet pořadí R_i^+, kde $Z_i > 0$
↪ (asymptotická) testová statistika

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

za H_0 má Z přibližně $\mathrm{N}(0, 1)$ rozdělení

Příklad – porovnání dvou metod učení nazpaměť

Příklad

Porovnání dvou metod učení (poslouchání vs. čtení).

- studie zahrnující 9 osob $\rightsquigarrow$ pozorování (X_i, Y_i)
- chceme vědět, zda je mezi oběma způsoby rozdíl

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_i	90	86	72	65	44	52	46	38	43
Y_i	85	87	70	62	44	53	42	35	46

H_0 : rozdělení X a Y je stejné

Příklad – pokrač.

- zavedeme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i \rightsquigarrow$ předpoklad symetrie
- $H_0 : m_Z = 0$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Z_i	5	-1	2	3	0	-1	4	3	-3
$\|Z_i\|$	5	1	2	3	–	1	4	3	3
R_i^+	8	1.5	3	5	–	1.5	7	5	5

- $W = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} = \frac{28 - \frac{8\cdot 9}{4}}{\sqrt{\frac{8\cdot 9\cdot 17}{24}}} = 1.4$$

- test: $|Z| < u_{0.975} = 1.96 \rightsquigarrow$ nelze zamítnout H_0

Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Situace: dva nezávislé náhodné výběry $X_1, \dots, X_n$ a $Y_1, \dots, Y_m$, oba ze spojitého rozdělení, chceme testovat

$$H_0 : \text{rozdělení } X \text{ a } Y \text{ jsou stejná}$$

(tj. i mediány se rovnají)

Postup

- uděláme společný (tzv. sdružený) výběr $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ a uspořádáme jej podle velikosti
- za H_0 jsou výběry X a Y „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojeného výběru
za H_0 by se průměrná pořadí X a Y neměla velmi lišit

Dvouvýběrový Wilcoxonův test

- vezmeme W součet pořadí $X_1, \dots, X_n$
proti H_0 svědčí velmi velké a velmi malé hodnoty W
- přesný test $\leftrightsquigarrow$ založený na W (software, tabulky)
- asymptotický test: testová statistika:

$$Z = \frac{W - \frac{n(n+m+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}}$$

má za H_0 přibližně $\mathrm{N}(0,1)$ rozdělení

Test:

- hypotézu H_0 o shodě rozdělení zamítneme, pokud

$$|Z| > u_{1-\alpha/2}$$

- lze uvažovat i jednostranné alternativy

Poznámky

- test se někdy nazývá Mannův-Whitneyův test
- obecně formulovaná hypotéza:
test citlivý zejména vůči posunutí, méně citlivý na nestejný rozptyl
- při větším počtu shod X_i a $Y_i \rightsquigarrow$ korekce ve jmenovateli Z (software provádí)

Příklad — výnos pšenice

Příklad

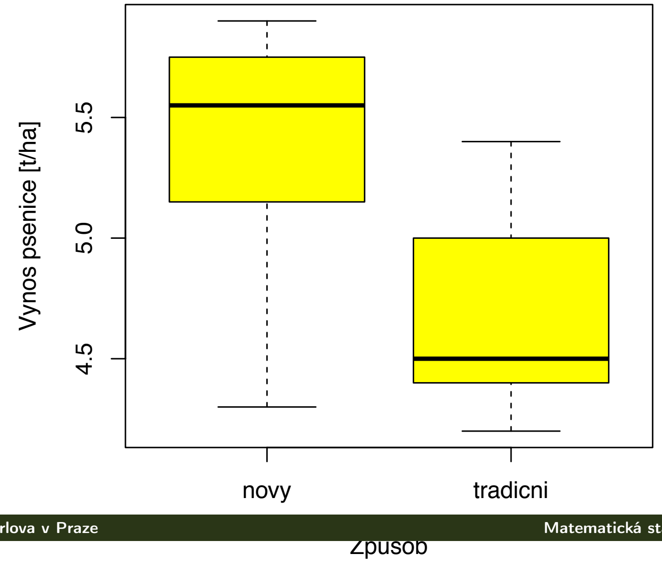
Vliv nového způsobu hnojení na výnos pšenice:

- 13 polí stejné kvality $\rightsquigarrow$ 8 nový způsob, 5 ošetřeno standardně
- měřeny výnosy v tunách na hektar
- X_i nový způsob: 5.7, 5.5, 4.3, 5.9, 5.2, 5.6, 5.8, 5.1
- Y_i standardní hnojivo: 5.0, 4.5, 4.2, 5.4, 4.4

Chceme testovat:

H_0 : způsob hnojení nemá vliv na výnos pšenice

Příklad – grafické znázornění dat



Příklad – řešení

Použijeme popsaný postup:

4.20	4.30	4.40	4.50	5.00	5.10	5.20	5.40	5.50	5.60	5.70	5.80	5.90
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

- $W = 2 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 70$
- testová statistika

$$Z = \frac{70 - \frac{8(5+8+1)}{2}}{\sqrt{\frac{5 \cdot 8 \cdot (5+8+1)}{12}}} = 2.050$$

- $|Z| > z_{0.975} = 1.960 \rightsquigarrow$ zamítáme H_0

Řešení v programu R

- R počítá $\widetilde{W}$ pořadí Y, zde $\widetilde{W} = 21$
- uvádí Mannovu-Whitneyovu statistiku

$$U = mn + \frac{1}{2}m(m+1) - \widetilde{W}$$

pak U udává počet případů, kdy $X_i > Y_j$

```
> wilcox.test(x,y,correct=F,exact=F)
Wilcoxon rank sum test
data: x and y
W = 34, p-value = 0.04042
alternative hypothesis: true location shift is not equal
to 0
```

Shrnutí

	normální rozdělení	spojité rozdělení
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxon
párová pozorování	párový t-test	párový Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	dvouvýběrový Wilcoxon