

Náhodný vektor

- zatím jsme sledovali jednu náhodnou veličinu, její rozdělení a charakteristiky
- často potřebujeme vyšetřovat **vzájemný vztah několika náhodných veličin**
- musíme sledovat jejich chování „společně“
- příklady: vztah hmotnosti a výšky člověka, šířka a délka výrobku, teplota, tlak a vlhkost vzduchu, pohlaví a plat náhodně vybraného člověka . . .
- obecně můžeme sledovat n náhodných veličin, pro jednoduchost se ale omezíme na dvě veličiny X a Y

Náhodný vektor

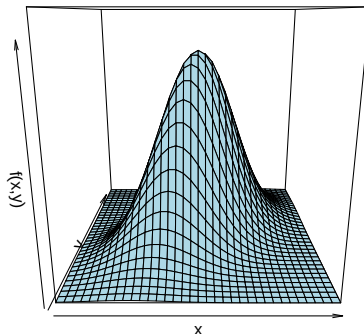
Náhodný vektor je dvojice náhodných veličin $(X, Y)^T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Rozdělení náhodného vektoru

- sdružená *distribuční funkce* $F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$, která je funkcí z $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$
- *spojité* rozdělení popíšeme tzv. sdruženou *hustotou*
 - je teď funkcí $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$
 - hodnota $f(x, y)$ udává, jak často náhodný vektor padá kolem bodu (x, y)
 - má vlastnosti analogické hustotě náhodné veličiny
- *diskrétní* rozdělení popíšeme tzv. sdruženými pravděpodobnostmi $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ pro všechna možná x_i a y_j (tabulka pravděpodobností)

Hustota náhodného vektoru

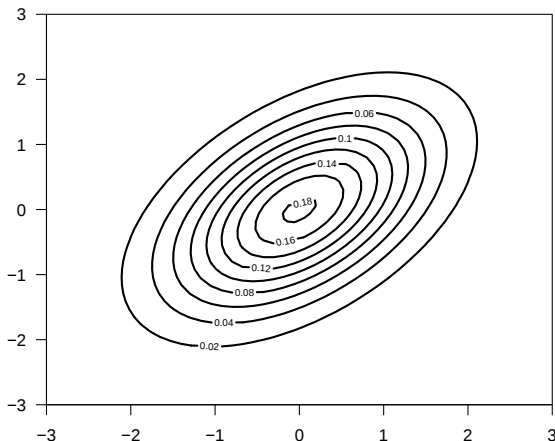
Příklad hustoty spojitého rozdělení:



Platí $f(x,y) \geq 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$.

Hustota náhodného vektoru

Hustota z předchozího obrázku nakreslená pomocí vrstevnic.



Příklad diskrétního rozdělení

Příklad: Na základě historických zkušeností lze předpokládat, že známky z matematiky a fyziky v prvním ročníku mají rozdělení uvedené v následující tabulce

Matematika	Fyzika			
	1	2	3	4
1	0.1	0.1	0.02	0.01
2	0.08	0.12	0.06	0.01
3	0.05	0.08	0.12	0.02
4	0.01	0.02	0.1	0.1

$$\text{Platí } \sum_{i,j=1}^4 p_{ij} = 1$$

Sdružené a marginální rozdělení

- Rozdělení náhodného vektoru $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ obsahuje něco navíc, než kdybychom znali jen rozdělení samotné náhodné veličiny X a samotné náhodné veličiny Y .
- To, co je tam navíc, je **informace o vzájemném vztahu** obou veličin.
- Rozdělení náhodného vektoru $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ nazýváme **sdružené rozdělení** náhodných veličin X a Y .
- Rozdělení samotného X a samotného Y nazýváme **marginální rozdělení** náhodných veličin X a Y .

Sdružené a marginální rozdělení

Interpretace:

- sdružené rozdělení nám říká, jak se chová (X, Y) společně (jakožto dvojice)
- marginální rozdělení popisuje chování jedné veličiny bez ohledu na hodnoty druhé

Vztah sdruženého a marginálního rozdělení:

- ze sdruženého rozdělení lze vždy určit marginální
- opačně to obecně není možné, tj. z marginálního nelze jednoznačně určit rozdělení sdružené
(k dané dvojici marginálních rozdělení dokonce existuje nekonečně mnoho odpovídajících sdružených rozdělení)

Příklad známky

Matematika (X)	Fyzika (Y)				
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Z tabulky umíme spočítat rozdělení samotného X a samotného Y (tj. marginální rozdělení). Např.

$$P[X = 1] = P[X = 1, Y = 1] + \dots + P[X = 1, Y = 4] = 0.23$$

Sdružené a marginální rozdělení

Věta

Nechť $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ je **diskrétní** náhodný vektor s rozdělením určeným pravděpodobnostmi $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$. Marginální rozdělení veličin X a Y pak jsou

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j] = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Sdružené a marginální rozdělení

Pro spojité rozdělení platí analogie předchozího tvrzení:

Věta

Nechť $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ je náhodný vektor se **spojitým rozdělením** se sdruženou hustotou $f(x, y)$. Marginální hustoty veličin X a Y pak jsou

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Nezávislost náhodných veličin

- v praxi nás často zajímá, zda je mezi veličinami X a Y **nějaký vztah**
- spec. se můžeme ptát, zda jsou **nezávislé** $\iff$ hodnoty jedné veličiny nezávisí na hodnotách druhé

Příklad

Nechť X je známka z Matematické statistiky a Y je počet navštívených přednášek náhodně vybraného studenta. Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?

- nezávislost $\iff$ známka nezávisí na počtu navštívených přednášek $\iff P(X = i | Y = j)$ nezávisí na hodnotách j , tj.
$$P(X = i | Y = j) = P(X = i)$$
- už víme, že toto odpovídá podmínce
$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \text{ pro všechna } i, j$$

Nezávislost náhodných veličin

Definice

Náhodné veličiny X a Y nazveme **nezávislé**, pokud pro každé dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}$ platí

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] \cdot P[Y \in B].$$

Nezávislé veličiny:

- $P[X \in A \mid Y \in B] = P[X \in A]$ tj. hodnoty jedné náhodné veličiny **nejsou ovlivněny** hodnotami druhé.
- ze znalosti hodnoty jedné veličiny nic nevíme o druhé veličině

Charakterizace nezávislosti

Věta

- ① Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i] \cdot P[Y = y_j]$$

pro každé x_i, y_j , kterých X a Y nabývají.

- ② Spojité náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když platí

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pro každé } x, y \in \mathbb{R}.$$

Příklad známky

Matematika (X)	Fyzika (Y)				
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Součinná podmínka neplatí $\rightsquigarrow$ veličiny jsou závislé. Např.

$$P[X = 1, Y = 1] = 0.1 \neq 0.23 \cdot 0.24.$$

Nezávislost — poznámka

- definici nezávislosti lze snadno rozšířit na více než dvě náhodné veličiny
- platí obdobné charakterizace nezávislosti (sdružená hustota je součinem marginálních hustot apod.)

Střední hodnota součtu a součinu

Věta

Nechť X , Y jsou libovolné náhodné veličiny.

① Platí

$$E(X + Y) = EX + EY.$$

② Pokud jsou X a Y **nezávislé**, pak platí

$$E(XY) = (EX)(EY).$$

- střední hodnota součtu dvou (nebo více) náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot
- pro nezávislé náhodné veličiny je střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jejich středních hodnot
- pro závislé veličiny tomu tak může, ale nemusí být

Kovariance

- Jsou-li veličiny X a Y závislé $\rightsquigarrow$ budeme chtít popsat jejich závislost

Definice

Uvažujme náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. *Kovariancí* náhodných veličin X a Y rozumíme hodnotu

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

- kovariance vyjadřuje vzájemný vztah X a Y
- evidentně platí $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ a $\text{cov}(X, X) = \text{var } X$.

Vlastnosti kovariance

Věta

- 1 Kovariance může nabývat jakýchkoli reálných hodnot, ale pro dvě konkrétní veličiny musí platit

$$\text{cov}^2(X, Y) \leq \text{var } X \cdot \text{var } Y.$$

- 2 Platí

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY.$$

- 3 Pokud jsou X a Y nezávislé, pak $\text{cov}(X, Y) = 0$.

- pozor, tvrzení 3 neplatí opačně (tj. z nulové kovariance nelze obecně nic usuzovat o nezávislosti)
- 3 plyne z 2, neboť pro nezávislé veličiny $EXY = EXEY$.

Interpretace kovariance

- $\text{cov}(X, Y) > 0 \iff$ náhodné veličiny X a Y jsou závislé v „**pozitivním smyslu**“
 - vyšší hodnoty X jsou svázány s vyššími hodnotami Y (a nižší hodnoty X s nižšími hodnotami Y)
 - příklad: výška a váha člověka.
- $\text{cov}(X, Y) < 0 \iff$ náhodné veličiny X a Y jsou závislé v „**negativním smyslu**“
 - vyšší hodnoty X jsou svázány s nižšími hodnotami Y (a nižší hodnoty X s vyššími hodnotami Y)
 - příklad: výše IQ a průměrná známka na ZŠ
- $\text{cov}(X, Y) = 0$ neznamená, že by mezi X a Y nebyl nutně žádný vztah (ještě se o tom zmíníme později)

Výpočet kovariance

K výpočtu se používá vzorec

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EXEY$$

- člen EXY počítáme ze sdruženého rozdělení

$$EXY = \begin{cases} \sum \sum_{i,j} x_i y_j P[X = x_i, Y = y_j], & \text{pro diskrétní rozdělení,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy & \text{pro spojitě rozdělení.} \end{cases}$$

- členy EX a EY počítáme z marginálního rozdělení (střední hodnota náhodné veličiny)

Příklad známky

Matematika (X)	Fyzika (Y)				
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

$$EXY = 1 \cdot 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + \dots + 4 \cdot 4 \cdot 0.1 = 6.43,$$

$$EX = 1 \cdot 0.23 + 2 \cdot 0.27 + \dots + 4 \cdot 0.23 = 2.5,$$

$$EY = 1 \cdot 0.24 + \dots + 4 \cdot 0.14 = 2.34,$$

$$\text{cov}(X, Y) = 6.43 - 2.5 \cdot 2.34 = 0.58.$$

Korelace

- hodnoty kovariance se špatně interpretují
- z hodnoty $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ poznáme, že X a Y jsou závislé a jakým směrem, ale nepoznáme, **jak silně** jsou závislé

Definice

Uvažujme náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. **Korelací** náhodných veličin X a Y rozumíme hodnotu

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X \text{ var } Y}}.$$

- korelace se někdy značí ρ_{XY}
- někdy mluvíme o **korelačním koeficientu**.

Vlastnosti korelace

Věta

- ❶ Korelace ρ_{XY} vždy **leží mezi -1 a 1** a

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0.$$

- ❷ Pokud jsou X a Y **nezávislé**, pak $\text{cor}(X, Y) = 0$.

- ❸ Platí

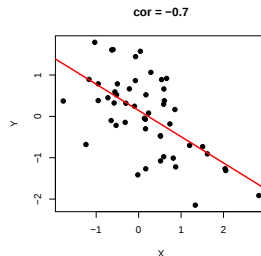
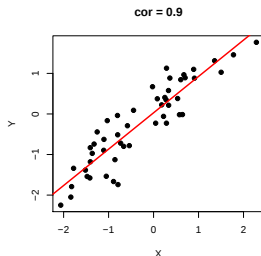
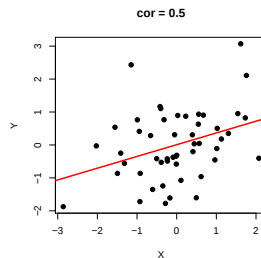
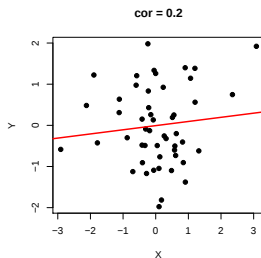
$$\rho_{XY} = 1 \quad \text{právě když } Y = a + bX \\ \text{pro nějaké } a \in \mathbb{R} \text{ a } b > 0.$$

$$\rho_{XY} = -1 \quad \text{právě když } Y = a + bX \\ \text{pro nějaké } a \in \mathbb{R} \text{ a } b < 0.$$

Interpretace korelace

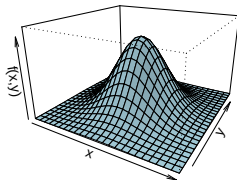
- korelace měří sílu **lineární závislosti** mezi X a Y
- znaménko korelace udává směr závislosti
- jsou-li X a Y silně lineárně závislé (tj. hodnoty této dvojice padají nejčastěji někde kolem přímky v $\mathbb{R}^2$ s nenulovou směrnici), pak je korelace blízko 1 nebo -1 .
- **nezávislé** veličiny mají vždy **nulovou korelaci**
- je-li korelace nulová, neznamená to, že X a Y jsou nutně nezávislé
(korelace je mírou pouze lineární závislosti)

Interpretace korelace

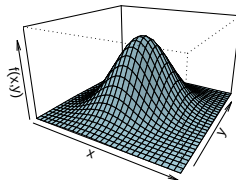


Hustota rozdělení s různými korelacemi

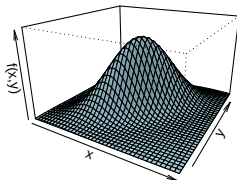
$\text{cor}(X,Y) = 0$



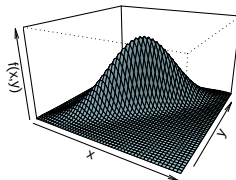
$\text{cor}(X,Y) = 0.3$



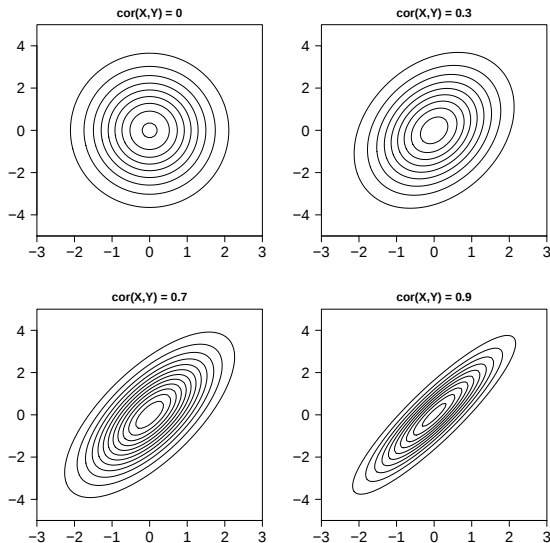
$\text{cor}(X,Y) = 0.7$



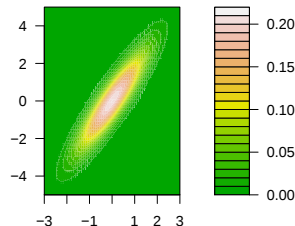
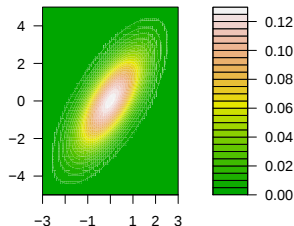
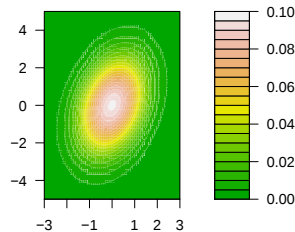
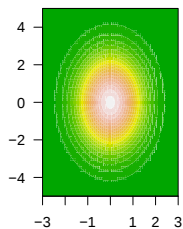
$\text{cor}(X,Y) = 0.9$



Hustota rozdělení s různými korelacemi



Hustota rozdělení s různými korelacemi



Příklad známky

Matematika (X)	Fyzika (Y)				
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Už víme $\text{cov}(X, Y) = 0.58$. Z marginálních rozdělání spočítáme

$$\text{var } X = EX^2 - (EX)^2 = \dots = 7.42 - 2.5^2 = 1.17$$

$$\text{var } Y = EY^2 - (EY)^2 = \dots = 6.46 - 2.34^2 = 0.98$$

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{0.58}{\sqrt{1.17 \cdot 0.98}} = 0.54.$$

Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

- ❶ $E(a + bX) = a + bEX,$
- ❷ $E(X + Y) = EX + EY,$
- ❸ $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var} X,$
- ❹ $\text{var}(X + Y) = \text{var} X + \text{var} Y + 2\text{cov}(X, Y)$
- ❺ pro nezávislé veličiny $\text{var}(X + Y) = \text{var} X + \text{var} Y$