Testování hypotéz o střední hodnotě

ve výběrech z normálního rozdělení

**Jednovýběrový t-test:**

**Data:**

realizace náh. výběru *X*1, ..., *Xn*, t. j. ***n* nezávislých pozorování**

**náhodné veličiny** *X*~N(*μ*,*σ*2).

**Hypotéza: H0: *μ* = *μ*0.**

Oboustranná alternativa: H1: *μ* ≠ *μ*0.

Bodový odhad pro *μ*: $\overbar{X}$= $\frac{1}{n} \sum\_{i=1}^{n}X\_{i}$.

Idea testu: $\overbar{X}$ daleko od *μ*0 => zamítáme H0 ve prospěch H1.

**Intervalový odhad pro *μ***: **I*μ*** = [$\overbar{X}$- $\frac{S\_{n}}{\sqrt{n}}$ t*n*-1(1-$ \frac{ α}{2}$ ); $\overbar{X}$+ $\frac{S\_{n}}{\sqrt{n}}$ t*n*-1(1-$ \frac{ α}{2}$ ) ],

kde $S\_{n}^{2}$= $\frac{1}{n-1}\sum\_{i=1}^{n}(X\_{i}-\overbar{X})^{2} $je bodový odhad rozptylu *σ*2 ,

 t*n*-1(1-$ \frac{ α}{2}$ ) je (1-$ \frac{ α}{2})$ 100% - ní kvantil Studentova rozdělení t*n*-1

a platí P(I*μ* pokryje *μ*) = 1- *α* .

Nejčastěji volíme hladinu testu *α =* 0.05 = P(zamítneme H0, když platí).

Za platnosti H0 máme: P(*μ*0 $\in $ I*μ* ) = 1- *α*, a tedy P(*μ*0 neleží v I*μ* ) = *α* , odtud dostaneme

**kritický obor** testu: ***μ*0 neleží v I*μ* => zamítáme H0** ve prospěch H1 na hladině*α*.

Lze upravit na tvar: $\left|T\_{n}\right|$ > t*n*-1(1-$ \frac{ α}{2}$ ) **=>** zamítáme H0 ve prospěch H1 na hladině*α*,

kde $T\_{n}$ = $\sqrt{n } \frac{1}{S\_{n}} (\overbar{X }- μ\_{0})$ je testová statistika mající Studentovo rozdělení t*n*-1.

Ověření předpokladů: nezávislost: intuitivně podle povahy dat,

normalita: histogram dat, test na normalitu dat (např. Shapiro-Wilk).

Nesplnění normality: 1-výběrový Wilcoxonův test.

**Párový t-test:**

**Data:**

**nezávislá párová pozorování** (*X*1,*Y*1), ..., (*Xn*,*Yn*),

taková, že *Zi* = *Xi* - *Yi*, *i* = 1,..., *n* tvoří výběr z N(*μ*,*σ*2), kde *μ* = *μX* - *μY* .

**Hypotéza:** **H0 : *μX* = *μY ,*** t.zn. *μ* =0.

Oboustranná alternativa: H1: *μX* ≠ *μY* , t.zn. *μ* ≠0.

Provedení testu: aplikujeme jednovýběrový t-test na rozdíly v párech *Z*1, ..., *Zn .*

**Dvouvýběrový t-test:**

**Data:**

**realizace 2 nezávislých náhodných výběrů**

*X*1, ..., *Xm* z rozdělení N(*μX* ,*σ*2) a *Y*1, ..., *Yn*  z rozdělení N(*μY* ,*σ*2).

**Hypotéza:** **H0: *μX* = *μY*** , t.zn.  *μX* - *μY* =0.

Oboustranná alternativa: H1: *μX* ≠ *μY* .

Idea testu: $\overbar{X}$ daleko od $\overbar{Y}$ => zamítáme H0 ve prospěch H1.

**Intervalový odhad pro *μX* - *μY*** : **I** = [$\overbar{X}$- $\overbar{Y}$ $- \frac{S}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}}$ t*m*+*n*-2(1-$ \frac{ α}{2}$ ); $ \overbar{X}$- $\overbar{Y}$+ $\frac{S}{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}}$ t*m*+*n*-2(1-$ \frac{ α}{2}$ ) ],

kde $S^{2}$= $\frac{1}{m+n-2} [\left(m-1\right)S\_{X}^{2 }+ \left(n-1\right)S\_{Y }^{2} ]$ je vážený průměr odhadů rozptylu

 v 1. a v 2. výběru.

**Kritický obor** testu: **0neleží v I => zamítáme H0** ve prospěch H1 na hladině*α*.

Lze upravit na tvar: $\left|T\right|$ > t*m*+*n*-2(1-$ \frac{ α}{2}$ ) => zamítáme H0 ve prospěch H1 na hladině*α*,

kde *T* = $\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{1}{S} (\overbar{X}- \overbar{Y})$ je testová statistika mající Studentovo rozdělení t*m*+*n*-2 .

Ověření předpokladů: nezávislost mezi výběry a uvnitř výběrů: intuitivně podle povahy dat,

 shoda rozptylů: F-test (zamítá H0: $σ\_{X}^{2}= σ\_{Y}^{2}$, je li $\frac{S\_{X}^{2}}{S\_{Y}^{2}}$dalekood 1),

 normalita: histogramy nebo testy na normalitu v obou výběrech.

Nesplnění předpokladů:

normalita ANO → shoda rozptylů ANO → dvouvýběrový t- test,

normalita ANO → shoda rozptylů NE → Welchův test,

normalita NE → dvouvýběrový Wilcoxonův test.

Poznámky k normalitě:

1) Centrovaný a normovanýprůměr $\sqrt{n } \frac{1}{σ} (\overbar{X }- μ)$ veličin s rozdělením N(*μ*,*σ*2) má N(0,1),

nahradíme-li směrodatnou odchylku *σ* jejím odhadem *Sn* , dostaneme $T\_{n}$ ~ t*n*-1.

Proto se v kritických oborech t-testů používají kvantily rozdělení t*n*-1.

 Pro *n →* ∞ je Studentovo rozdělení o *n*-1 stupních volnosti t*n*-1 přibližně stejné jako N(0,1).

2) CLV **=>** centrovaný a normovanýprůměr $\sqrt{n } \frac{1}{σ} (\overbar{X }- μ)$ má přibližně rozdělení N(0,1).

Proto **při velkém *n* nemá porušení normality dat zásadní vliv na fungování testu**,

testujeme pak na hladině přibližně rovné *α* . To platí pro jednovýběrový i dvouvýběrový t-test.

Poznámky k nezávislosti:

1) Předpoklad nezávislosti pozorování, tj., že data jsou realizací náhodného výběru, je podstatný. Při podezření na jeho nesplnění bychom neměli výše zmíněné testy používat.

2) Předpoklad nezávislosti zpravidla nesplňují data ve formě časové řady (měření náhodné veličiny v pravidelných časových intervalech, např. teplota ovzduší na meteorologické stanici v Klementinu každý den v poledne).

Podklady ze statistického softwaru k testování hypotéz :

Statistické softwarové produkty (R, Statistica, NCSS, SPSS ... ) umožňují testovat

hypotézy o střední hodnotě i jiné - např. hypotézu, že

- data jsou realizací náhodného výběru z normálního rozdělení,

- dvě spojité veličiny jsou nekorelované,

- dvě diskrétní veličiny jsou nezávislé,

- střední hodnoty v *k* > 2 výběrech jsou stejné,

- chování náhodné veličiny ovlivňuje jeden nebo více faktorů.

Na výstupu ke každému testu je softwarem uvedena tzv.

***p*-hodnota**, což je

**nejmenší hladina, na které zamítáme testovanou hypotézu**.

Provedení testu na hladině *α* pomocí *p*-hodnoty:

***p ≤ α*****=>** zamítáme **H0** nahladině *p* a každé vyšší

**=> zamítáme H0 na hladině*α***,

***p > α*****=>** zamítáme **H0** až odhladiny *p*

**=> nezamítáme H0 na hladině*α.***