Úlohy k cvičení

Souvislost, stromy a kostry

Připomenutí: *Strom* je souvislý graf bez kružnic. Tvrzení o existenci listů říká, že každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy. Tvrzení o trhání listů říká, že je-li v list v grafu G, potom G je strom, právě když $G - v$ je strom, kde $G - v$ značí graf získaný z G po odebrání v. Věta o ekvivalentních charakterizacích stromů říká, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro graf $G = (V, E)$:

(i) G je strom,

(ii) pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y,

(iii) G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý,

(iv) G je bez kružnic a po přidání libovolné hrany (mezi vrcholy z V) kružnice vznikne,

(v) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Úloha 1: Ukažte, že doplněk grafu G je nesouvislý, právě když G obsahuje úplný bipartitní graf na všech vrcholech.

Úloha 2: Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G - v$, $G - u$ a $G - u - v$ jsou souvislé.

Úloha 3: Určete minimální a maximální počet hran v grafu s n vrcholy a c komponentami.

Úloha 4: Dokažte, že graf G je strom, právě když nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Úloha 5: Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

Úloha 6:* Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre nějakého stromu.

Úloha 7: Dokažte, že pokud strom obsahuje vrchol stupně k, potom obsahuje alespoň k listů.

Úloha 8: Mějme strom, který má $\ell > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že platí $\ell = v + 2$.

Úloha 9: Dokažte, že každý strom s n vrcholy má nezávislou množinu velikosti alespoň $n/2$.

Úloha 10: Ukažte, že každá kostra souvislého grafu obsahuje všechny mosty (tj. hrany, po jejichž odebrání graf přestane být souvislý).

Úloha 11: Spočtěte, kolik různých koster má:

(a) kružnice s n vrcholy,

(b) „činka“, tedy dva cykly s m a n vrcholy spojené cestou délky ℓ,

(c) tzv. Θ-graf, tedy dva vrcholy stupně 3 spojené cestami délek ℓ, m a n.