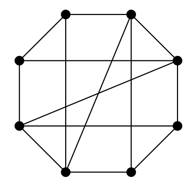
Rovinné grafy.

Připomenutí: *Eulerova formule* pro rovinné grafy říká, že je-li $G = (V, E)$ souvislý rovinný graf a s počet jeho stěn v nějakém rovinném nakreslení, potom platí $|V| - |E| + s = 2$. Dále libovolný rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy má nejvýše $3n - 6$ hran. Pokud je navíc bez trojúhelníků, tak má nejvýše $2n - 4$ hran. Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5. Princip sudosti lze aplikovat i na stěny: $2|E| = \sum_f \deg f$, kde suma je přes všechny stěny f v nějakém rovinném nakreslení a $\deg f$ je stupeň příslušné stěny.

Úloha 1: Rozhodněte, jestli graf na obrázku je rovinný, či nikoliv.



Úloha 2:

(a) Určete maximální možný počet stěn v rovinném nakreslení rovinného grafu s n vrcholy.

(b) Určete maximální možný počet stěn v rovinném nakreslení rovinného grafu s n vrcholy při dodatečné podmínce, že vnější stěna je ohraničena kružnicí délky k.

Úloha 3: Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Úloha 4: Existuje kubický (tedy 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

(a) právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?

(b) právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

(c) jednu dvacetiúhelníkovou stěnu, deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

*Úloha 5**:* Dokažte, že každý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem. (Tah se může pouze “dotýkat” ve vrcholech.)

Barevnost.

Připomenutí: Je-li $G = (V, E)$ graf a $k \in \mathbb{N}$, pak zobrazení $b\colon V \to [k]$ je *obarvení k barvami*, pokud $b(u) \neq b(v)$ pro každou hranu $\{u, v\} \in e$. *Chromatické číslo* (též *barevnost*) grafu G je nejmenší k takové, že G má obarvení k barvami.

Úloha 6: Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků. (Tj. že graf má obarvení čtyřmi barvami.) *Nápověda: Nejprve ukažte existenci vrcholu omezeného stupně.*

Úloha 7: Je-li dán graf G, potom jeho k-tou mocninou rozumíme graf značený G^k se stejnou množinou vrcholů s tím, že hrana v G^k vede mezi vrcholy u a v, právě když jsou u a v spojeny cestou délky nejvýše k v G. (Speciálně G^1 je původní graf G.)

(a) V závislosti na $n \geq 3$ přirozeném určete barevnost (chromatické číslo) C_n^3.

(b*) V závislosti na $n \geq 3$ přirozeném určete barevnost (chromatické číslo) C_n^5.

*Úloha 8**:* Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovná dvěma. *Nápověda: Graf je dvoubarevný právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus.*

Úloha 9:* Ukažte, že neexistuje eulerovský rovinný graf jehož stěny by tvořil jeden pěticyklus a samé trojúhelníky. (Můžete využít předchozí příklad, i když ho neumíte vyřešit.)