Úlohy k cvičení

Množiny

Úloha 1: Zjistěte, které z následujících podmínek jsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokud některá není ekvivalentní, pokuste se ji upravit co nejmenším zásahem, aby ekvivalentní byla. Symboly A^c a B^c označují doplněk množin A a B v nějaké množině X, která obsahuje A i B.

(a) $A \setminus B = \emptyset$

(b) $A \cup B = B$

(c) $A \cap B = B$

(d) $A^c \setminus B \subseteq B^c$

(e) $A \cap B^c = \emptyset$

(f) $A^c \subseteq B^c$

Úloha 2: Zjistěte, které z následujících vztahů platí pro symetrickou diferenci definovanou jako $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

(c) $A \triangle B = B \triangle A$

(d) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

(e) $A \triangle (B \triangle A) = A$

(f) $A \triangle A = \emptyset$

(g) $A \triangle \emptyset = A$

Úloha 3: Je pravda, že pro každé dvě množiny X, Y platí $X = Y$, právě když $2^X = 2^Y$? (Připomínáme, že 2^A značí množinu podmnožin množiny A.)

Relace

Připomenutí: *Relací mezi množinami X a Y* myslíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$ (tedy množiny všech dvojic (x, y), kde $x \in X$ a $y \in Y$). *Relací na množině X* myslíme relaci mezi množinami X a X, tedy podmnožinu kartézského součinu $X \times X = X^2$. Skutečnost, že dvojice (x, y) náleží do relace R zapisujeme též jako xRy.

Relace na množině X je

- *reflexivní*, pokud $\forall x \in X: xRx$;
- *symetrická*, pokud $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$;
- *(slabě) antisymetrická*, pokud $\forall x, y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;

- *tranzitivní*, pokud $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Úloha 4: Rozhodněte, které z následujících relací jsou reflexivní, symetrické, tranizitivní.

(a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c)\}$

(b) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (c, c)\}$

(c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$

(d) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, R obsahuje přesně ty dvojice $(x, y) \in X^2$, že x a y jsou nesoudělná.

Úloha 5: Nechť R a S jsou reflexivní relace na téže množině X. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \triangle S$

(e) $R \circ S$

(f) R^{-1}

Úloha 6: Nechť R a S jsou symetrické relace na téže množině X. Které z následujících relací jsou také symetrické?

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \triangle S$

(e) $R \circ S$

(f) R^{-1}

Úloha 7: Nechť R a S jsou tranzitivní relace na téže množině X. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \triangle S$

(e) $R \circ S$

(f) R^{-1}