Úlohy k cvičení

Relace – pokračování

Úloha 1: Určete počet všech relací na n-prvkové množině:

(a) všech
(b) reflexivních
(c) symetrických
(d) antisymetrických

Pokud nevíte, jak úlohu vyřešit pro obecné n, vyřešte alespoň pro $n = 4$.

Úloha 2: Rozhodněte zda jsou následující relace ekvivalence. Pokud ano, určete třídy ekvivalence.

(a) $X_1 = \mathbb{N}$, $xR_1y \Leftrightarrow m|(x-y)$, kde $m \in \{2, 3 \dots\}$ (zbytkové třídy modulo m)
(b) $X_2 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$
(c) $X_3 = \mathbb{N}$, $xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N}, z > 1\colon z|y \wedge z|x$

Úloha 3: Určete počet různých ekvivalencí na pětiprvkové množině.

Úloha 4: Ukažte, že pro každou funkci $f\colon X \to X$ na konečné X platí, že je prostá, právě když je na. Platí totéž i pro nekonečné množiny?

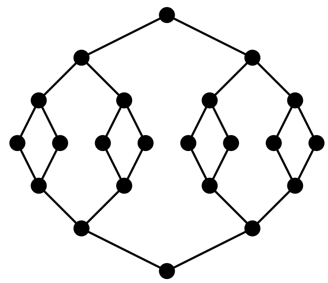
Úloha 5: Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

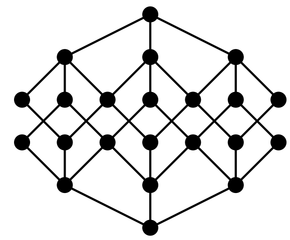
Úloha 6: Pro každé přirozené n najděte funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $f^n = f$ (tedy $f^n(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{N}$) ale $f^i \neq f$ pro $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ (tedy existuje x, že $f^i(x) \neq f(x)$). V této úloze exponent f^k neznačí mocninu, ale složení. Tedy například $f^3 = f \circ f \circ f$.

Úloha 7: U následujících variant rozhodněte, zda existuje částečné uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

(a) Bez největšího prvku ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.
(b) Bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.
(c) Bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.
(d) Bez největšího prvku ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.
(e) Bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.
(f) Bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině.

Úloha 8: Pro uspořádání daná následujícími Hasseho diagramy vyznačte nějaký nejdelší řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.





Úloha 9:* Pro n přirozené nalezněte nejdelší řetězec a antiřetězec na částečně uspořádané množině $([n], |)$.

Úloha 10: Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ (dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

(a) Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a, b) \leq_S (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$.

(b) Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a, b) \leq_U (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$.

(c) Porovnání v obou složkách různými směry $\leq_Z$: $(a, b) \leq_Z (x, y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \geq y$.

(d) Slovníkové (lexikografiické) porovnání $\leq_L$: $(a, b) \leq_L (x, y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y)$.