Úlohy k cvičení

Stupně vrcholů

Připomenutí: Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$, potom *stupeň* vrcholu v, značený $\deg v$, je počet hran z v vycházejících. *Skóre* grafu G je posloupnost stupňů $(\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_n)$ pro nějaké pořadí $v_1, \ldots, v_n$ všech vrcholů z V.

Princip sudosti říká, že $2|E| = \sum_{v \in V} \deg v$.

Úloha 1: Najděte příklad dvou grafů (dvou stromů; stromu a grafu, co není strom) se stejným skóre, které nejsou izomorfní.

Úloha 2: Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu takovou, jejíž odebráním se graf stane nesouvislým.

Úloha 3: Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf G sudý počet hran, tak potom k nebo $|V(G)|$ je sudé. (Graf je t-regulární, pokud každý jeho vrchol má stupeň t.)

Úloha 4:* Pro každá dvě přirozená čísla k a n taková, že $k < n$ a $2|kn$ najděte příklad k-regulárního grafu na n vrcholech.

Eulerovské grafy

Připomenutí: Tah je *uzavřený*, pokud jeho počáteční a koncový vrchol splývají. Tah je *eulerovský*, pokud pokrývá všechny hrany. Graf je *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah. Podle charakterizace eulerovských grafů, graf je eulerovský, právě když je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň.

V orientovaném grafu, definice výše jsou analogické, jen se u orientovaného tahu vyžaduje, aby všechny hrany byly souhlasně orientované (když procházíme tah). Orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u, v vede orientovaná cesta z u do v, je *slabě souvislý*, pokud pro každé u, v vede cesta z u do v jejíž hrany mohou být orientované libovolně (po směru i proti směru cesty).

Úloha 5: Charakterizujte všechny grafy, které mají (ne nutně uzavřený) eulerovský tah.

Úloha 6: Uvažujme graf G, jehož vrcholy jsou posloupnosti 0 a 1 délky d, tedy $V(G) = \{0, 1\}^d$ a hrany vedou mezi dvojicemi posloupností, které se liší právě v jedné souřadnici. (Tomuto grafu se někdy říká graf hyperkrychle.) V závislosti na d určete, zda je tento graf eulerovský.

Úloha 7:* Dokažte, že každý eulerovský graf je hranově disjunktní sjednocení kružnic.

Úloha 8:* Nechť G je souvislý $2k$-regulární graf se sudým počtem hran. Dokažte, že obsahuje dva hranově disjunktní k-faktory, tedy k-regulární podgrafy se stejnou množinou vrcholů.

Úloha 9: Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro orientovaný graf G:

(i) G má uzavřený (orientovaný) eulerovský tah.

(ii) G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni

(iii) G je slabě souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni

Matice sousednosti

Připomenutí: Je-li $G = (V, E)$ graf a označíme-li $v_1, \ldots, v_n$ všechny vrcholy z V (v nějakém pořadí). Potom matice sousednosti G je matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij} = 1$, pokud $\{v_i, v_j\} \in E$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Podle věty o počtu sledů, prvek $a_{ij}^{(k)}$ v k-té mocnině A^k matice A odpovídá počtu sledů délky k z v_i do v_j.

Úloha 10: Nechť G je graf a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran G určete součet všech prvků A, tj. výraz

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Úloha 11: Nechť G je graf bez trojúhelníků a A jeho matice sousednosti. Jaké prvky má na hlavní diagonále A^3, tj. třetí mocnina matice A?