Eulerovy substituce

Při počítání integrálů se můžeme setkat s integrandy obsahující výrazy tvaru $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Eulerovy substituce nám umožní převézt tyto integrandy na racionální funkce, které umíme řešit, např. přes parciální zlomky. První příklad bude řešený podrobněji, další potom stručněji.

1. Eulerova substituce: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$, kde $a > 0$.

- Spočtěte $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx$, kde $c > 0$.

Nejprve si všimneme, že $x^2 + c > 0$, tedy je výraz v integrálu definovaný na celém $\mathbf{R}$.
Použijeme substituci $\sqrt{x^2+c} = -x + t$. Potom, jelikož $c > 0$, máme $t = \sqrt{x^2+c} + x > 0$.
Nyní úpravami tohoto výrazu vyjádříme x jako funkci proměnné t:

$$\begin{aligned} x^2 + c &= x^2 - 2xt + t^2 \\ 2xt &= t^2 - c \\ x &= \frac{t^2-c}{2t} = \varphi(t) \end{aligned} \qquad \varphi'(t) = \frac{4t^2 - (2t^2-2c)}{4t^2} = \frac{t^2+c}{2t^2}.$$

Ukážeme, že můžeme použít Větu 14 pro $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$ a $\varphi(t) = \frac{t^2-c}{2t}$. Funkce φ má v každém bodě $(0,\infty)$ vlastní nenulovou derivaci $\varphi'(t) = \frac{t^2+c}{2t^2}$ a $\varphi((0,\infty)) = \mathbf{R}$ (což plyne např. z toho, že φ je spojitá a $\lim_{t\to 0^+}\varphi(t) = -\infty$, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$).
Platí

$$\sqrt{x^2+c} = -x + t = -\frac{t^2-c}{2t} + t = \frac{t^2+c}{2t}.$$

Tedy řešíme integrál

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int \frac{1}{\frac{t^2+c}{2t}}\frac{t^2+c}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt \overset{c}{=} \log|t|.$$

Po dosazení $t = \sqrt{x^2+c} + x$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx \overset{c}{=} \log\left|\sqrt{x^2+c} + x\right|.$$

2. Eulerova substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, kde $c > 0$.

3. Eulerova substituce $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$.

- Spočtěte $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$.

Nejprve si rozložíme odmocninu: $\sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{-(x-1)(x-3)}$. Z tohoto nám plyne, že výraz v integrálu má smysl pro $x \in (1,3)$. Použijeme 3. Eulerovu substituci $\sqrt{-(x-1)(x-3)} = (x-1)t$. Počítejme

$$\begin{aligned} -(x-1)(x-3) &= (x-1)^2t^2 \\ x(t^2+1) &= t^2+3 \\ x &= \frac{t^2+3}{t^2+1} \\ t &= \frac{\sqrt{-(x-1)(x-3)}}{x-1} = \sqrt{-\frac{x-3}{x-1}} \end{aligned} \qquad dx = \frac{2t(t^2+1)-(t^2+3)2t}{(t^2+1)^2}dt = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt.$$

Ověříme předpoklady Věty 15: Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ je spojitá na $(1,3)$, tedy má na tomto intervalu primitivní funkci. Funkce $\varphi(t) = \frac{t^2+3}{t^2+1}$ má na intervalu $(0,\infty)$ zápornou derivaci, tedy je klesající, a tedy prostá. φ dále zobrazuje interval $(0,\infty)$ na interval $(1,3)$. Tedy můžeme použít Větu 15 a počítáme

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}}\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt = -2\int \frac{1}{t^2+1} = -2\arctan t + C = -2\arctan\sqrt{-\frac{x-3}{x-1}} + C.$$

Komentář: První otázka, která by vás mohla napadnout je „Proč zrovna tyto substituce?“. První substituce nám umožní zbavit se členu ax^2, potom můžeme vyjádřit jak x, tak původní odmocninu $\sqrt{ax^2+bx+c}$ jako racionální funkci proměnné t. Druhá substituce nám pak umožní zbavit se členu c. Třetí substituce také vede k rovnici bez druhé mocniny u x. Tyto substituce vedou k použití druhé věty o substituci, tj. používáte jednu z Vět 14 a 15, nezapomeňte ověřit předpoklady.