Kvadratické formy

Projděte si komentář k oddílu IV.4 přednášky!

- $\mathbb{A} = (a_{ij}) \ldots$ symetrická matice řádu n
- cíl: určit povahu $\mathbb{A}$, tedy jestli je PD, ND, PSD, NSD nebo ID

Obecný algoritmus

1. Matici $\mathbb{A}$ převedeme symetrickými úpravami na diagonální matici $\mathbb{D}$.
2. Povahu matice $\mathbb{D}$ určíme podle větičky IX.11.
3. Matice $\mathbb{A}$ má stejnou povahu jako $\mathbb{D}$ (podle věty IX.15).

Převedení na diagonální tvar

Úpravy předvedeme na matici 3×3.

I. Pokud $a_{11} \neq 0$, odečteme od j-tého řádku $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$-násobek prvního řádku a následně od j-tého sloupce $\frac{a_{1j}}{a_{11}}$-násobek prvního sloupce. Tuto úpravu provádíme postupně pro $j = 2, \ldots, n$. Pokud $a_{j1} = 0$, můžeme ji vynechat. Například pro $j = 2$ vypadá tato úprava následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ a_{31} & a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

II. Pokud $a_{11} = 0$ a $a_{jj} \neq 0$ pro nějaké $j \in \{2, \ldots, n\}$, pak prohodíme první a j-tý řádek a následně první a j-tý sloupec. Například, jestliže $a_{22} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{12} & 0 & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pak pokračujeme krokem I.

III. Pokud $a_{jj} = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$, ale existuje $i \in \{2, \ldots, n\}$ tak, že $a_{i1} \neq 0$, pak k prvnímu řádku přičteme i-tý řádek a následně k prvnímu sloupci přičteme i-tý sloupec. Například v situaci, kdy $a_{21} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{21} & a_{12} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{21} + a_{12} & a_{12} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $a_{21} + a_{12} = 2a_{12} \neq 0$, dostáváme se do bodu I.

Tento postup provádíme tak dlouho, dokud matici nepřevedeme na tvar, ve kterém je v prvním sloupci (a tedy i v prvním řádku) nejvýše jeden nenulový prvek, a to na pozici $(1,1)$. V našem příkladě bychom tedy matici převedli do tvaru

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

a dál pokračovali stejnými úpravami podmatice $\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Příklad 1. *Převeďte následující matici na diagonální a určete její povahu.*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} := \mathbb{D}$$

Podle větičky IX.11 je $\mathbb{D}$ indefinitní, protože má na diagonále kladný i záporný prvek. Podle věty IX.15 je $\mathbb{A}$ také indefinitní. □

V prvním kroku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku od druhého a první řádek od třetího, načež jsme ve druhém kroku provedli odpovídající sloupcové úpravy (zkuste se zamyslet nad tím, proč můžeme úpravy dělat najednou, místo abychom po první řádkové úpravě hned provedli příslušnou sloupcovou). Ve třetím kroku jsme odečetli $\frac{1}{2}$-násobek druhého řádku od třetího a provedli příslušnou sloupcovou úpravu.

Matici $\mathbb{D}$ jsme získali z matice $\mathbb{A}$ symetrickou transformací. Dle věty IX.13 tedy existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(3 \times 3)$ tak, že $\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T = \mathbb{D}$. Co kdybychom chtěli matici $\mathbb{B}$ najít? V tom případě si vedle matice $\mathbb{A}$ napíšeme ještě jednotkovou matici. Vždy, když provedeme řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$, provedeme stejnou úpravu i pro vedlejší matici. Sloupcové úpravy ale s druhou maticí neprovádíme! Tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Matice vpravo „zaznamenává“ provedené řádkové úpravy, proto je to matice $\mathbb{B}$, kterou jsme hledali:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Máme $\mathbb{D} = \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matici $\mathbb{A}$ můžeme pomocí $\mathbb{D}$ vyjádřít jako

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{D}(\mathbb{B}^T)^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{D}(\mathbb{B}^{-1})^T.$$

Stačí nám najít inverzní matici k $\mathbb{B}$. To provedeme standardně Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

V prvním kroku jsme přičetli dvojnásobek prvního řádku k druhému a v dalším kroku jsme pričetli $\frac{1}{2}$-násobek druhého řádku k třetímu.

Dostali jsme

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a získáváme rozklad matice $\mathbb{A}$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukážeme si ještě dvě jiná řešení příkladu 1. Matice $\mathbb{A}$ definuje kvadratickou formu Q, která je dána předpisem

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + z^2.$$

K určení toho, jestli Q je PD, PSD, ND, NSD použijeme takzvanou Lagrangeovu metodu doplnění na čtverce.

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= (x + 2y + z)^2 + (2 - 4)y^2 + 2yz + (1 - 1)z^2 \\ &= (x + 2y + z)^2 - 2\left(y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2}z^2. \end{aligned}$$

Položíme $x' = x + 2y + z$, $y' = y - \frac{1}{2}z$ a $z' = z$. Dostali jsme vyjádření

$$Q(x, y, z) = (x')^2 - 2(y')^2 + \frac{1}{2}(z')^2.$$

Všimněte si, že koeficienty odpovídají prvkům na diagonále matice $\mathbb{D}$. Symetrické úpravy provedené v prvním řešení můžeme považovat za maticový zápis doplnění na čtverce. Kvadratická forma v proměnných x', y' a z' je indefinitní, takže i původní kvadratická forma Q je indefinitní.

Třetí a poslední metoda řešení, kterou si předvedeme, spočívá v použití Sylvestrova pravidla, což je věta IX.17 z přednášky.

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2.$$

Protože $D_2 < -2$, nemůže být $\mathbb{A}$ pozitivně(semi)definitní ani negativně(semi)definitní. Zbývá jediná možnost, totiž že $\mathbb{A}$ je indefinitní (srov. komentář k oddílu Kvadratické formy, str. 14).