Taylorův polynom

Příklad 1. Najděte Taylorův polynom třetího řádu funkce $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ v bodě $x = 0$.

1. způsob:

$$T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \frac{2\sin x \cos x \cdot \cos^3 x - (1 + \sin^2 x) \cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0$$

Výsledek získáme dosazením:

$$T_3^{f,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Komentář: Platí

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

což můžeme jinak zapsat jako

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \omega(x)x^3,$$

kde ω je funkce splňující $\lim\limits_{x\to 0} \omega(x) = 0$.

2. způsob: Podle větičky X.2 (3)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Hledáme koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3), \quad x \to 0. \tag{1}$$

Protože $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, platí

$$f(x)\cos x = 1$$

$$\left(a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = 1, \quad x \to 0$$

$$a + bx + \left(c - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(d - \frac{b}{2}\right)x^3 + o(x^3) = 1, \quad x \to 0$$

Pro přechod k poslední rovnosti jsme použili aritmetiku malého o (věta X.3, body (i) a (iii)). Na obou stranách vezmeme limitu pro $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$.

$$bx + \left(c - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(d - \frac{b}{2}\right)x^3 + o(x^3) = 0, \quad x \to 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x}$$

$$b + \left(c - \frac{a}{2}\right)x + \left(d - \frac{b}{2}\right)x^2 + o(x^2) = 0, \quad x \to 0$$

podle věty X.3 (iii). Vezmeme limitu pro $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$.

$$\left(c - \frac{a}{2}\right)x + \left(d - \frac{b}{2}\right)x^2 + o(x^2) = 0, \quad x \to 0 \quad | \cdot \frac{1}{x}$$
$$\left(c - \frac{a}{2}\right) + \left(d - \frac{b}{2}\right)x + o(x) = 0, \quad x \to 0$$

Opět jsme použili větu X.3 (iii). Přechod k limitě pro $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\left(d - \frac{b}{2}\right)x + o(x) = 0, \quad x \to 0 \quad | \cdot \frac{1}{x}$$
$$\left(d - \frac{b}{2}\right) + \frac{o(x)}{x} = 0, \quad x \to 0$$

Přejdeme k limitě pro $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{b}{2} = 0$. Dosazením do (1):

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \quad x \to 0$$

Z jednoznačnosti Taylorova polynomu (věta X.1) dostáváme $T_3^{f,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Komentář: Druhý způsob lze obecně využít k nalezení Taylorova polynomu funkce $\frac{1}{g(x)}$, pokud známe Taylorův polynom funkce $g(x)$. Využívali jsme při něm vlastnosti malého o. Pokud si při práci s malým o nejste jistí, zkuste si rozepsat

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \omega_1(x)x^3,$$
$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \omega_2(x)x^3,$$

kde ω_1 a ω_2 jsou funkce takové, že $\lim_{x\to 0} \omega_1(x) = 0$ a $\lim_{x\to 0} \omega_2(x) = 0$. Pak můžete lépe sledovat, jak výpočet probíhá.

Příklad 2: Najděte Taylorův polynom 4. řádu v bodě 0 pro funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení: Označme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad x \in (-1, 1)$$

Podle větičky X.2 (5)

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}y + \binom{-\frac{1}{2}}{2}y^2 + o(y^2), \quad y \to 0$$
$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2), \quad y \to 0$$

Dosadíme $y = -x^2$. Pak $o(y^2) = o(x^4)$, $x \to 0$ podle věty X.4.

$$f(x) = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

Díky jednoznačnosti Taylorova polynomu (věta X.1)

$$T_4^{f,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4$$

Cvičení: Dokázali byste využít předchozí příklad k nalezení Taylorova polynomu 5. řádu funkce $\arcsin x$ v bodě $x = 0$?

Příklad 3: Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} \overset{\text{X.2 (3)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right) = \frac{1}{24}$$