Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad 1. *Najděte vlastní čísla (včetně násobností) a příslušné vlastní vektory matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Charakteristický polynom je

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & -7 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ -3 & \lambda + 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

(rozvoj podle třetího sloupce). Alternativně:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & -7 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \mathrm{Tr}(\mathbb{A})\lambda^2 + (-1 + 5 - 5 + 9)\lambda - \det\mathbb{A} =$$
$$= \lambda^3 - 5\lambda + 8\lambda - 4,$$

uhodneme kořen $\lambda = 1$ a rozložíme.

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$ násobnosti 1 a $\lambda_2 = 2$ násobnosti 2. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_1 jsou právě **nenulová** řešení soustavy

$$(\lambda_1\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(viz důkaz věty IX.18). Množina vlastních vektorů příslušných $\lambda_1 = 1$ je $\{t \cdot [0, 0, 1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\}$.

$$(\lambda_2\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbf{x} = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Množina vlastních vektorů příslušných $\lambda_2 = 2$ je $\{t \cdot [1, 1, 11] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\}$. U složitějších příkladů bychom k řešení soustavy použili Gaussovu eliminaci.