Nalezněte primitivní funkce.

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sin^3 x}$

2. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

3. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

4.* V závislosti na parametru $\alpha > 0$ vypočtěte $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha\cos x}$.

Vypočtěte následující integrály.

5. $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

6. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

7. $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$

8. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

10.* $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$, $|a|<1$, $|b|<1$, $ab>0$

Výsledky. **1.** $\log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **2.** *Substituce* $\operatorname{tg} x$ *- nezapomeňte slepit v bodech* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$*, kde* $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right| + \sin 2x\right)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{2-\sin x}{2+\sin x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ **4.** $F(x)$, kde pro $0<\alpha<1$: $F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + k\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$, $F((2k+1)\pi) = \lim\limits_{x\to(2k+1)\pi} F(x)$, pro $\alpha = 1$: $F(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi,\pi) + 2k\pi$ a pro $\alpha > 1$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\right|$, $x \in (-\arccos(-\frac{1}{\alpha}), \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$ nebo $x \in (\arccos(-\frac{1}{\alpha}), 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\alpha})) + 2k\pi$, přičemž v bodě $(2k+1)\pi$ je funkce F vždy dodefinována 0. **5.** $200\sqrt{2}$ **6.** $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **7.** $\frac{29}{270}$ **8.** $\frac{1}{16}\pi a^4$ **9.** $2\pi\sqrt{2}$, např. substituce $t = \operatorname{tg} x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$ **10.** $-\frac{1}{a}\log\frac{1-a}{1+a}$ pokud $a = b$, $\frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ pro $a \neq b$ (např. substituce $y = 1-x$ a $t = \sqrt{\frac{(1-b)^2+2by}{(1-a)^2+2ay}}$)