Základy biostatistiky

(MS710P09)
ak. rok 2014/2015

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
karel.zvara@natur.cuni.cz
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼zvara
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK
Ústav aplikací matematiky a výpočetní techniky PřF UK

(naposledy upraveno 12. dubna 2015)

- **cvičení na počítačích v B5**
  - nutno **zapsat se do paralelky** prostřednictvím SIS
  - zápočet za aktivní účast + odevzdávání souborů + písemky (upřesní cvičící)
  - nutno mít **aktivní účet v učebnách**, znát svoje heslo
  - volně šiřitelný program R (http://cran.r-project.org/)
- **zkouška v B5**
  - jen se zápočtem, přihlašování prostřednictvím SIS
  - kombinace písemného a ústního zkoušení
  - řešení úloh na počítači, **interpretace výsledků**
  - základy teorie (pojmy, metody a jejich volba, interpretace)
- **Moodle** slajdy, popisy cvičení, heslo Biostat1415
- **literatura**
  - K. Zvára: Základy statistiky v prostředí R (Biomedicínská statistika IV), Karolinum 2013
  - K. Zvára: Biostatistika. Karolinum 1998,..., 2008
- **konzultace**
  - út 14:00– prac. 209, Albertov 6 (ÚAMVT PřF UK)

tři části přednášky

snad neodpadne žádná přednáška

- popisná statistika
  - několika čísly vystihnout důležitou vlastnost
  - jednoduchým grafem vyjádřit důležitou vlastnost
  - porovnat soubory dat
- abstraktní pohled (teorie)
  - pravděpodobnost, Bayesův vzorec, náhodná veličina, distribuční funkce, střední hodnota, nezávislost
  - populace a výběr
  - popisné statistiky jako odhady populačních parametrů
  - interval spolehlivosti pro populační parametr
  - test statistické hypotézy
- některé metody (modely)
  - testy o jednom, dvou či několika výběrech
  - rozhodování o závislosti kvantitativních či kvalitativních znaků
- cílem jsou principy, pojmy, základní metody, nikoliv vzorečky

cvičení

- příležitost **procvičit** pojmy a postupy
- k tomu je třeba **sledovat přednášku** aspoň orientačně
- doporučuji aktivně využít cvičení, spolupracovat s cvičícím, ověřit si tak pochopení principů a pojmů
- u zkoušky mechanická aplikace nestačí, je třeba vysvětlit **proč** byl zvolen nějaký postup, **co vyšlo**, **interpretovat výsledky**; také znát **pojmy**, jejich podstatné vlastnosti a interpretaci
- cvičící mají svoje stránky s podrobnějšími informacemi:
- **cvičení není náhradou přednášky!**
- pracuje se v prostředí R, zejména v nadstavbě Rcmdr, která
  - nabízí řešení většiny reálných úloh
  - umožňuje modifikaci dosavadního postupu
  - poskytuje demonstrační pomůcky
  - R je volně šiřitelný SW
  - v R pracují mnozí další učitelé

statistika

nejzákladnější dělení, dvojí pohled

- **statistika**
  - **popisná** (deskriptivní):
    data stručně popsat, něco z dat „vydolovat“
    tvrdit něco o daných datech, nezobecňovat
  - **induktivní** (konfirmatorní):
    tvrdit něco nového, zobecnit na větší soubor (populaci),
    důležitá je interpretace
- **příklady dat**:
  - **výšky**: výška desetiletých chlapců/dívek
  - **děti**: pohlaví, porodní hmotnost a délka, hmotnost a délka v jednom roce, věk otce a matky, počet onemocnění otitidou v prvním roce věku
  - **kojení**: hmotnost a porodní délka a ve 24. týdnu, věk a výška obou rodičů, zda těhotenství plánováno, zda dudlík, porodnice

co měříme (zjišťujeme) a kde

- měříme na **statistických jednotkách** (osoba, obec, stát, pokusné pole, rostlinka pšenice, třetí list rostlinky pšenice, . . .)
- měříme (zjišťujeme) hodnoty **znaků**
- **znak** - vlastnost měřená na objektu (statistické jednotce)
- zjištěnou hodnotu vyjadřujeme ve zvoleném **měřítku** (stupnici)
- na jedné jednotce můžeme měřit několik znaků (umožní to vyšetřování závislosti)
- měříme na skupinách jednotek – **souborech**
- zajímají nás **hromadné** vlastnosti, které charakterizují celou velkou skupinu (**populaci**), ne jen právě změřené objekty
- hodnoty znaků zjišťujeme u jedinců, chceme vypovídat celých souborech jedinců
- kolik procent mužů ve věku 20–25 let kouří?

měřítka

- **nula-jedničkové**
  pouze dvě možné hodnoty (muž/žena, kouří/nekouří)
- **nominální**
  seznam všech jednoznačně rozlišitelných hodnot,
  v R **faktor** (porodnice, pohlaví, odrůda)
- **ordinální**
  hodnoty nominálního měřítka jsou uspořádány,
  v R **uspořádaný faktor** (vzdělání matky, stupeň bolesti)
- **intervalové**
  stejné vzdálenosti sousedních hodnot (rok narození)
  „**o kolik** je x menší než y“ (nikoliv „kolikrát“)
- **poměrové**
  srovnání se zvolenou jednotkou (hmotnost, výška, věk)
  „**kolikrát** je x větší, než y“

hrubší dělení měřítek

(bezprostředně ovlivní volbu metod)

- **kvalitativní**
  nula-jedničkové, nominální, zpravidla i ordinální
- u kvalitativních se zpravidla udávají **četnosti** jednotlivých hodnot (kolikrát která hodnota nastala)
- **kvantitativní** (spojité)
  intervalové, poměrové, někdy ordinální (ale není spojité)
- hodnoty kvantitativních – čísla
- pro četnosti hodnot v kvalitativním měřítku se používají zpravidla jiné charakteristiky a metody, než pro hodnoty v kvantitativním měřítku

veličina, statistika

- číselně vyjádřený výsledek měření, pokusu
- **spojitá veličina**: možné hodnoty znaků v intervalovém nebo poměrovém měřítku jsou hustě rozmístěné, mezi dvěma hodnotami existuje nekonečně mnoho dalších hodnot, v praxi je zapisujeme s omezenou přesností
- **diskrétní veličina**: četnosti hodnot znaků v nula-jedničkovém, nominálním (či ordinálním) měřítku
- u veličin používáme číselné charakteristiky některých hromadných vlastností, např. **míry polohy** (míry centrální tendence), **míry variability**, míry tvaru)
- **statistika** (další význam slova) – funkce pozorovaných hodnot např. průměrná teplota v roce, nejvyšší teplota v roce; číselně charakterizuje důležitou vlastnost veličiny (veličin), je to společná vlastnost skupiny statistických jednotek

označení

rozlišujte n, n_i, m, x_i, x_i^* (nemusí být čísla)

$x_1,$	$x_2,$	$\ldots,$	x_n	zjištěné hodnoty
$x_1^*,$	$x_2^*,$	$\ldots,$	x_m^*	možné hodnoty (různé)
$n_1,$	$n_2,$	$\ldots,$	n_m	**četnosti** hodnot

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{j=1}^{m} n_j = n$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_m}{n} \quad \text{- \textbf{relativní} četnosti}}$$

$$\boxed{N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i \quad \text{\textbf{kumulativní} četnosti}}$$

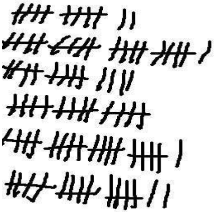
pro kumulativní četnosti je nutné aspoň ordinální měřítko

histogram (barplot u kvalitativní veličiny)

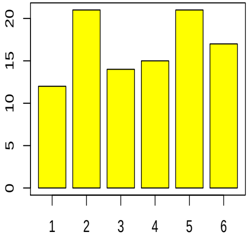
- **histogram**
  grafické znázornění intervalových četností spojité veličiny
- **barplot (sloupcový diagram)**
  grafické znázorněné četností (počtů hodnot) kvalitativního znaku
- plocha (výška) obdélníku úměrná četnosti
- relativní četnosti mají jen jiné měřítko svislé osy
- **výsečový diagram** pro relativní četnosti kvalitativního znaku (podíly nějakého celku)

příklad **hod kostkou A – barplot**

zpracování četností (kostka A), nominální měřítko s šesti hodnotami

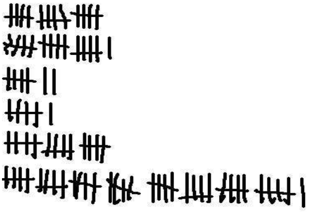


j	n_j	$f_j = n_j/n$
1	12	0,12
2	21	0,21
3	14	0,14
4	15	0,15
5	21	0,21
6	17	0,17
	$n = 100$	1,00

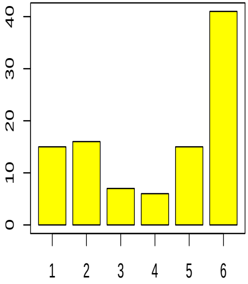


příklad **hod kostkou B – barplot**

zpracování četností (kostka B), nominální měřítko s šesti hodnotami



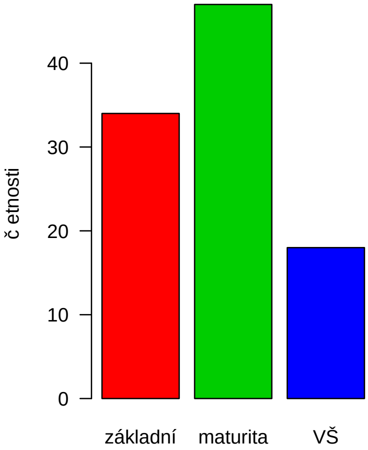
j	n_j	$f_j = n_j/n$
1	15	0,15
2	16	0,16
3	7	0,07
4	6	0,06
5	15	0,15
6	41	0,41
	$n = 100$	

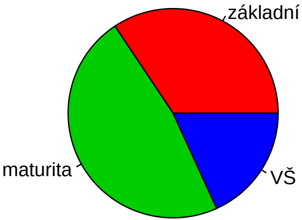


příklad **kojení** (vzdělání 99 matek)

ordinální měřítko se třemi hodnotami

vzděl.	zákl.	maturita	VŠ	celkem	pozn.
x_j^*	1	2	3		možné hodnoty
n_j	34	47	18	99	absolutní četnosti
n_j/n	0,343	0,475	0,182	1,000	relativní četnosti
n_j/n	34,3 %	47,5 %	18,2 %	100 %	relativní četnosti
N_j	34	81	99		kumulativní čet.


40
30
20
10
0
č etnosti
základní
maturita
VŠ


základní
maturita
VŠ

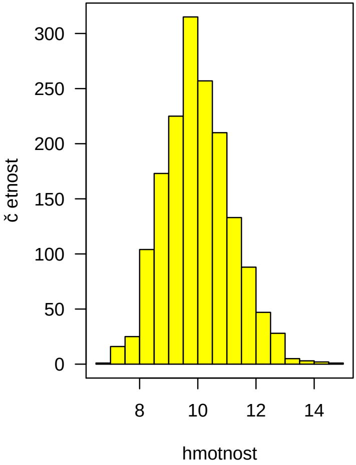
histogram u **spojité** veličiny

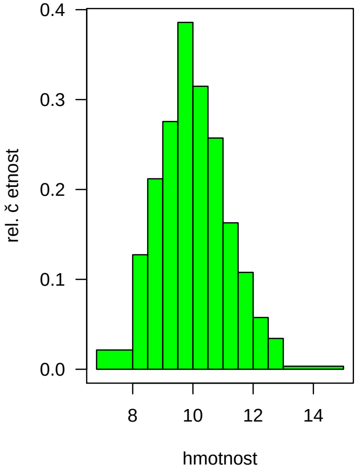
třídění: všechny hodnoty z daného intervalu $(t_{j-1}, t_j\rangle$ nahradíme prostřední hodnotou $x_j^* = (t_{j-1} + t_j)/2$
hmotnost dětí ve 12. měsíci (příklad **děti**, $n = 1633$)

j	x_j^*	t_j	n_j	n_j/n	N_j	N_j/n
1	7750	8000	42	0,026	42	0,026
2	8250	8500	104	0,063	146	0,089
3	8750	9000	173	0,106	319	0,195
4	9250	9500	225	0,138	544	0,333
5	9750	10000	315	0,193	859	0,526
6	10250	10500	257	0,157	1116	0,683
7	10750	11000	210	0,129	1326	0,812
8	11250	11500	133	0,081	1459	0,893
9	11750	12000	88	0,054	1547	0,947
10	12250	12500	47	0,029	1594	0,976
11	12750	13000	28	0,017	1622	0,992
12	13250	∞	11	0,007	1633	1,000

histogram pro hmotnost v jednom roce

Svislá osa histogramu napravo popsána tak, aby vybarvená plocha byla rovna jedné. Nepřehlédněte, že většina sloupků má šířku rovnou jedné polovině.





variační řada, pořadí

nutno rozlišovat x_i a $x_{(i)}$

- původní hodnoty spojité veličiny (kvantitativní znak)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \text{např. } 7,\ 4,\ 5,\ 4,\ 2$$

- **variační řada** [sort(x)]

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \ldots \leq x_{(n)} \qquad \text{např. } 2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 7$$

- **pořadí**: [rank(x)]
  na které místo ve variační řadě se dostane daná hodnota
  nejmenší dostane pořadí 1, druhá nejmenší dostane 2, ...
- je-li několik hodnot stejných, dostanou průměr
  z odpovídajících pořadí
- pořadí hodnot 7, 4, 5, 4, 2 jsou po řadě 5, 2,5, 4, 2,5, 1

empirická distribuční funkce

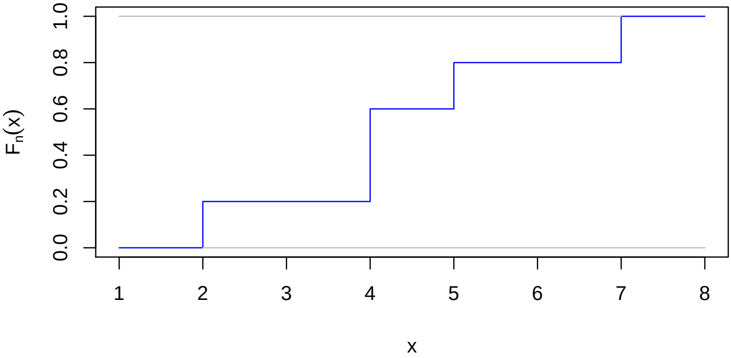
[empirical distribution function]

relativní četnost hodnot, které jsou menší nebo rovny x

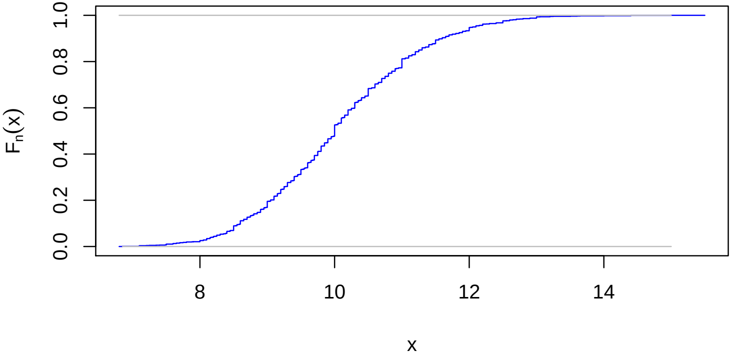
jaká část dat je **nejvýše** x

$$\boxed{F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}}$$

naše variační řada: 2, 4, 4, 5, 7



empirická distribuční funkce



- příklad: váha dětí v jednom roce ($n = 1633$)
- připomíná hladkou neklesající funkci
- matematický model předpokládá pro celou populaci opravdu hladkou neklesající funkci

průměry

- **průměr** [mean(x)]

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- **vážený průměr** s využitím četností $(n = \sum_j n_j)$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1 x_1^* + n_2 x_2^* + \ldots + n_m x_m^*\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j x_j^*}$$

- obecněji s nezápornými vahami w_j hodnot x_j^*

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_j w_j x_j^*}{\sum_j w_j}}$$

[weighted.mean(x, w)]

příklad: vážený průměr známek vážený kredity

jaký je nevážený průměr?

známka	kreditů	součin
x_j^*	w_j	$x_j^* \cdot w_j$
1	6	6
2	4	8
2	2	4
3	4	12
celkem	16	30

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{6 + 4 + 2 + 4} = \frac{30}{16} = 1{,}875$$

[weighted.mean(x=c(1,2,2,3),w=c(6,4,2,4))]

další míry polohy

opět jsou důležiré závorky kolem indexů

- **medián** (**pro**střední hodnota, NIKOLIV *střední* hodnota)

$$\boxed{\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ liché} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & n \text{ sudé} \end{cases}}$$

[median(x)]

- **minimum, maximum**

$$x_{\min} = x_{(1)} \qquad \text{[min(x)]}$$
$$x_{\max} = x_{(n)} \qquad \text{[max(x)]}$$

[range(x)] spočítá dvojici $(x_{\min}, x_{\max})$

- **variační průměr** [mean(range(x))]

$$\frac{1}{2}\left(x_{(1)} + x_{(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\min} + x_{\max}\right)$$

kvartily, decily

- **medián** $\tilde{x}$ je číslo, které dělí data na dvě poloviny: hodnot menších nebo stejných jako medián – hodnot větších nebo stejných jako medián [median(x)] [quantile(x,probs=1/2)]
- **dolní kvartil** Q_1 je číslo, které oddělí čtvrtinu hodnot (menších či stejných jako Q_1) od tří čtvrtin hodnot (větších či stejných jako Q_1) [quantile(x,probs=1/4)]
- **horní kvartil** Q_3 je číslo, které oddělí tři čtvrtiny hodnot (menších či stejných jako Q_3) od čtvrtiny hodnot (větších či stejných jako Q_3) [quantile(x,probs=3/4)]
- **první decil** je číslo, které oddělí desetinu nejmenších hodnot od ostatních hodnot [quantile(x,probs=1/10)]
- **percentil** x_p je číslo, které oddělí $100p$ % nejmenších hodnot od ostatních hodnot [quantile(x,probs=p)]
- několik percentilů současně [quantile(x,probs=(0:4)/4)]

výpočet percentilu x_p (fakultativně)

jedna z nejčastěji užívaných metod výpočtu percentilu, standardní v R

- k daným n, p se najde celé číslo k splňující

$$\frac{k-1}{n-1} \leq p < \frac{k}{n-1}$$

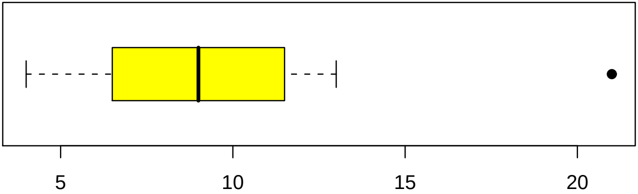
- tedy $k = \lfloor 1 + (n-1) \cdot p \rfloor$
  ($\lfloor x \rfloor$ znamená celou část z x, zaokrouhlí dolů)
- provede se lineární interpolace mezi $x_{(k)}$ a $x_{(k+1)}$
  ($\{x\}$ znamená zlomkovou část x, o kolik přesahuje celé číslo)

$$q = \{1 + (n-1) \cdot p\} = (1 + (n-1) \cdot p) - k$$
$$x_p = (1-q) \cdot x_{(k)} + q \cdot x_{(k+1)}$$

- např. pro $n = 99, p = 0{,}25$ bude

$$k = \lfloor 1 + (99-1) \cdot 0{,}25 \rfloor = \lfloor 25{,}5 \rfloor = 25, \quad q = 25{,}5 - 25 = 0{,}5$$
$$Q_1 = x_{0{,}25} = (1-0{,}5) \cdot x_{(25)} + 0{,}5 \cdot x_{(26)}$$

krabicový diagram



[boxplot(c(4,5,8,9,10,13,21),horizontal=TRUE,col=7,pch=16)]

znázorěna řada statistik pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21

- medián ($\tilde{x} = 9$) – příčka obdélníka
- kvartily ($Q_1 = 6{,}5$, $Q_3 = 11{,}5$) – kratší strany obdélníka
- tykadla od kvartilu k minimu (maximu), pokud není odlehlé
- odlehlé pozorování – je dál, než $3/2 \cdot (Q_3 - Q_1)$ $(= 7{,}5)$ od bližšího kvartilu

vlastnosti míry polohy

- přičteme-li ke každé hodnotě x stejnou konstantu a, musíme tutéž konstantu a přičíst k průměru (mediánu, kvartilu, ...)
- vynásobíme-li každou hodnotu x stejnou kladnou konstantou b, musíme průměr (medián, kvartil, ...) vynásobit toutéž konstantou b
- pro dobrou míru polohy $\mu(X)$ platí:

$$\begin{aligned} \mu(a + X) &= a + \mu(X) \\ \mu(b \cdot X) &= b \cdot \mu(X) \qquad\qquad (b > 0) \end{aligned}$$

- dobrá míra polohy je citlivá vůči posunutí (pozná změnu úrovně) i vůči změně měřítka (např. přechod od g ke kg)

míry variability

- míra variability $\sigma(x)$ číselně charakterizuje jinou vlastnost, než míry polohy, proto na poloze **nesmí záviset**
- ukazuje nakolik jsou zjištěné hodnoty nestejné, velikost jejich kolísání, jejich **variabilitu**
- pro dobrou míru variability $\sigma(X)$ platí:

$$\sigma(a+X) = \sigma(X) \qquad \text{rozdíl proti míře polohy!!!}$$
$$\sigma(b \cdot X) = b \cdot \sigma(X) \qquad b > 0$$

- přičtení konstanty a míru variability nezmění, na vynásobení kladnou konstantou b reaguje

směrodatná odchylka, rozptyl

[standard deviation, variance]

- **rozptyl** (variance) $\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

  $s_{b\cdot x}^2 = b^2 s_x^2$ [var(x)]

- např. pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 dostaneme $\bar{x} = 10$, tedy

$$s_x^2 = \frac{1}{7-1}\left((4-10)^2 + (5-10)^2 + \ldots + (21-10)^2\right) = \frac{196}{6}$$

- **směrodatná odchylka**

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

[sd(x)]

další míry variability

- **rozpětí** $R = x_{\max} - x_{\min}$ [range]
- **(mezi)kvartilové rozpětí** [interquartile range]

$$\boxed{R_Q = Q_3 - Q_1}$$

- **variační koeficient** (nesplňuje ani jeden požadavek) slouží k porovnání variability při různých úrovních [coefficient of variation]

$$\boxed{V_x = \frac{s_x}{\bar{x}}}$$

- **entropie** (pro nominální, požadavky nemají smysl, nezávisí na označení hodnot, jen na jejich relativních četnostech) [entropy]

$$H = -\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} \ln \frac{n_j}{n}$$

příklad ICHS: vztah mužů ke kouření

vzděl.	vztah ke kouření						celk.	H
	nekuřák/bývalý		střední		silný			
zákl.	25	21,4 %	14	12,0 %	78	66,7 %	117	0,854
odb.	83	28,0 %	24	8,1 %	189	63,9 %	296	0,847
stř.	99	33,2 %	24	8,1 %	175	58,7 %	298	0,882
VŠ	115	48,3 %	17	7,1 %	106	44,5 %	238	0,900

muži se základním vzděláním:

$$H = -\left(\frac{25}{117}\ln\frac{25}{117} + \frac{14}{117}\ln\frac{14}{117} + \frac{78}{117}\ln\frac{78}{117}\right) = 0{,}854123$$

větší vyrovnanost $\Rightarrow$ větší entropie

maximum pro $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ vyjde $H = \ln(4) = 1{,}386294$

z-skóry

- z-**skóry** (normovaná veličina)

$$\boxed{z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

- [(x-mean(x))/sd(x)] nebo [scale(x)]
- hodnoty $z_1, z_2, \ldots, z_n$ „ztratily" informaci o poloze a variabilitě, vždy platí $\bar{z} = 0, \quad s_z = 1$
- přičtení konstanty ani násobení konstantou z-skóry nezmění
- hodnocení vlastností nezávislých na poloze a variabilitě
- pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 platí $\bar{x} = 10, s_x = 5{,}715$
- proto dostaneme

$$z_1 = \frac{4 - 10}{5{,}715} = -1{,}050, \ldots, z_7 = \frac{21 - 10}{5{,}715} = 1{,}925$$

šikmost, špičatost

- **šikmost** (průměr 3. mocnin z-skórů)

$$\boxed{g_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s_x^3}}$$

[mean(((x-mean(x))/sd(x))^3)]

- **špičatost** (průměr 4. mocnin z-skórů zmenšený o 3)

$$\boxed{g_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^4 - 3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^4 - 3}$$

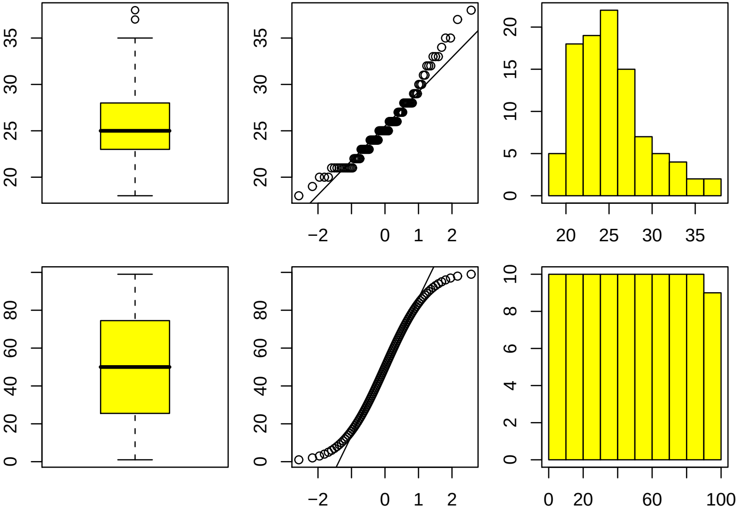
[mean(((x-mean(x))/sd(x))^4)-3]

- g_1, g_2 se používají k posouzení normality
- pro data: 4, 5, 8, 9, 10, 13, 21 dostaneme

$$g_1 = 0{,}771 \qquad g_2 = -0{,}770$$

příklad: věk matky, čísla 1 až 99

věk matek: $g_1 = 0{,}741$, $g_2 = 0{,}220$ čísla 1 až 99: $g_1 = 0$, $g_2 = -1{,}236$



normální diagram

[(normal) probability plot], [quantile-comparison plot]

- k ověřování předpokladu **normálního** rozdělení
- porovnává skutečnou variační řadu s ideální variační řadou normálního (Gaussova) rozdělení $N(0, 1)$
- v ideálním případě body téměř na přímce
- systematická odchylka ukazuje na rozdělení, které není normální
- konvexní či konkávní průběh – nesymetrie, nenulová šikmost
- esovitý průběh – nenulová špičatost
- [qqnorm(x)]
- přímku vloží [qqline(x)]
- některé programy mají zaměněny osy (Statistica)

závislost dvojice znaků

- možnost zkoumání závislosti dvou znaků
- způsob znázornění (prokazování) závisí na měřítcích znaků
- **kvantitativní – kvantitativní**
  rozptylový (bodový) diagram [scatter plot]
  korelace, regrese [correlation, regression]
- **kvantitativní - kvalitativní**
  krabicový diagram [box-plot]
  t-test, ANOVA
- **kvalitativní - kvalitativní**
  kontingenční tabulka [contingency table]
  chí-kvadrát test, Fisherův exaktní test

kvantitativní – kvantitativní

- pokud záleží na směru závislosti, pak vysvětlovanou (**závisle proměnnou**) veličinu umístíme na svislou osu y
- **korelační koeficient** vyjadřuje sílu a směr **vzájemné** závislosti

$$\boxed{r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}}, \quad \text{kde} \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- [cor(x,y)] [correlation coefficient]
- s_{xy} – výběrová **kovariance** [covariance]
- pomocí z-skórů ($\Rightarrow$ nezávislost na poloze a měřítku)

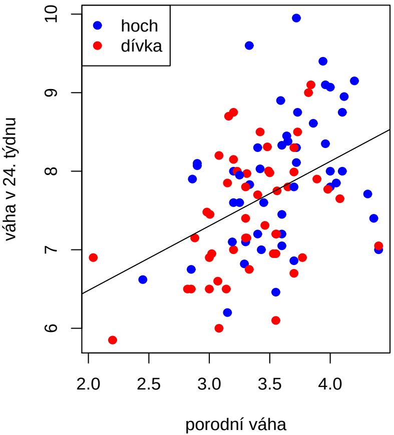
$$\boxed{r_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)}$$

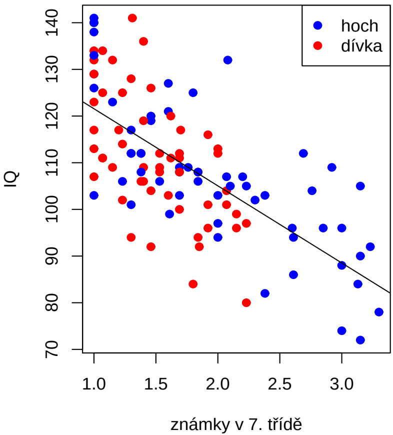
- pro $r_{xy} > 0$ s rostoucím x v průměru roste y
  pro $r_{xy} < 0$ s rostoucím x v průměru klesá y
  nezávislosti odpovídají hodnoty r_{xy} blízké nule

$$\boxed{-1 \leq r_{xy} \leq 1}$$

kvantitativní – kvantitativní, příklady

vlevo – závislost váhy v 24. týdnu na porodní váze s rozlišením pohlaví (data: Kojení)
vpravo – závislost IQ na průměrné známce v 7. třídě (data: Iq3)





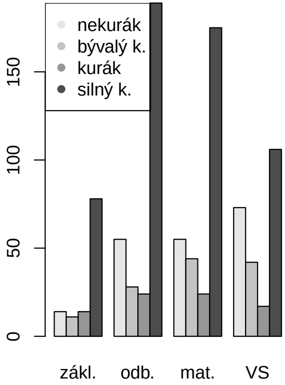
$r = 0{,}429$ $r = -0{,}689$

příklad: kouření u mužů

data: lchs

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	14	55	55	73	197
bývalý k.	11	28	44	42	125
kuřák	14	24	24	17	79
silný k.	78	189	175	106	548
celkem	117	296	298	238	949

v grafu znázorněny **absolutní** četnosti (sdružené, marginální četnosti) [barplot(t,beside=TRUE)]



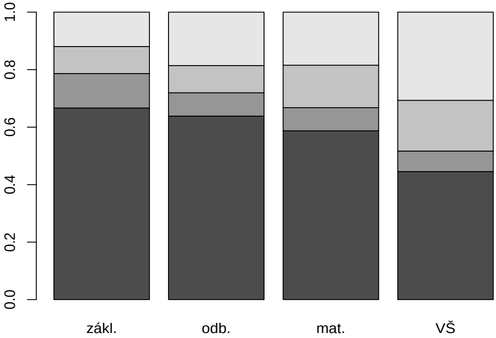
kvalitativní – kvalitativní

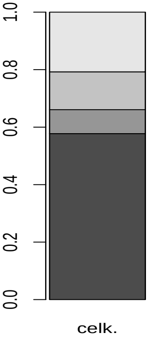
- **kontingenční tabulka** [contingency table]
  obsahuje přehledně zapsané úplné údaje
- sdružené četnosti jednotlivých kombinací hodnot dvou znaků
- marginální četnosti:
  - **řádkové** marginální četnosti: součty sdružených četností v jednotlivých řádcích (pro jednotlivé hodnoty řádkového znaku)
  - **sloupcové** marginální četnosti: součty sdružených četností v jednotlivých sloupcích (pro jednotlivé hodnoty sloupcového znaku)
- [table(F,G)] nebo [xtabs(∼ F + G)]
  resp. [xtabs(∼ F + G , data=DataFrame)]
  kde F a G jsou v R faktory, DataFrame je databáze

příklad: kouření u mužů

podmíněné relativní četnosti | marginální relativní četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	12,0 %	18,6 %	18,5 %	30,7 %	20,8 %
bývalý k.	9,4 %	9,5 %	14,8 %	17,6 %	13,2 %
kuřák	12,0 %	8,1 %	8,1 %	7,1 %	8,3 %
silný k.	66,7 %	63,9 %	58,7 %	44,5 %	57,7 %
celkem	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %





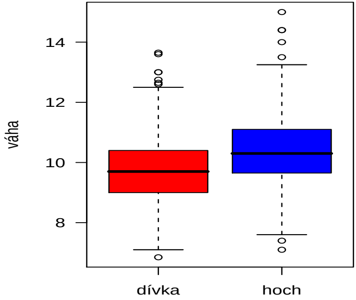
relativní četnosti v kontingenční tabulce

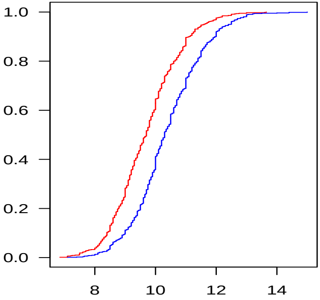
- **řádková procenta** (relativní četnosti v daném řádku)
  - podíl jednotlivých hodnot sloupcového znaku pro danou hodnotu řádkového znaku
  - **podmíněné rozdělení** hodnot sloupcového znaku pro danou hodnotu řádkového znaku
- **sloupcová procenta** (relativní četnosti v daném sloupci)
  - podíl jednotlivých hodnot řádkového znaku pro danou hodnotu sloupcového znaku
  - **podmíněné rozdělení** hodnot řádkového znaku pro danou hodnotu sloupcového znaku
- **nezávislosti** obou znaků odpovídá situace, kdy jsou např. sloupcová procenta pro všechny hodnoty sloupcového znaku podobné; podobně pro řádková procenta

kvantitativní – kvalitativní

váha v jednom roce podle pohlaví, data: Deti1633

- lze chápat jako závislost spojité veličiny na kvalitativní
- srovnání souborů dat (spojitá veličina)
- krabicové diagramy resp. empirické distribuční funkce
- příklad: hmotnost chlapců a dívek v jednom roce
- **nezávislosti** odpovídá podobné umístění krabic resp. empirických distribučních funkcí

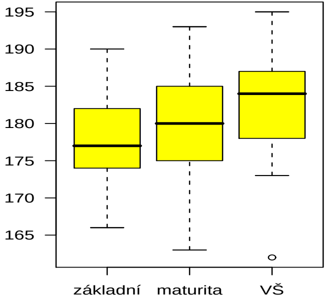


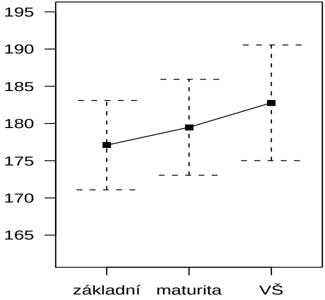


příklad: závislost výšky otce na vzdělání matky

data: Kojení

- porovnáme výšky otců ve skupinách podle vzdělání matky
- napravo znázorníme průměry a směrodatné odchylky
- intervaly kolem průměru mívají i jinou interpretaci (jsou jiné)





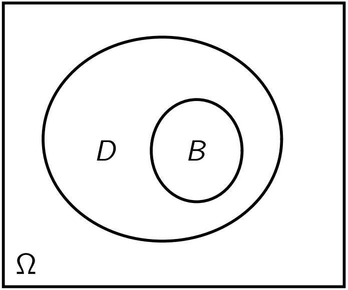
Náhodné jevy

- **náhodný pokus** výsledek předem neurčitý
- předpokládá se **stabilita relativních četností** možných výsledků, která s nezávislými opakováními pokusu roste
- **náhodný jev** tvrzení o výsledku náhodného pokusu (podmnožina množiny Ω)
- **jistý jev** Ω nastává vždy
- **nemožný jev** $\emptyset$ nenastává nikdy
- **podjev**: $B \subset D$ znamená $B \Rightarrow D$
- **jev opačný**: $\overline{D} \Leftrightarrow$ neplatí D
- **průnik jevů** $B \cap D$ nastaly oba jevy
- **sjednocení jevů** $D \cup B$ nastal **aspoň** jeden
- **neslučitelné jevy** $B \cap D = \emptyset$

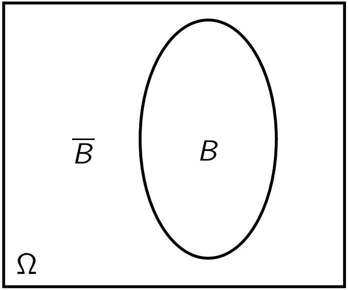
znázornění pomocí Vennova diagramu

celý obdélník – jev jistý

$$B \subset D \Rightarrow \mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(D)$$



$$\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B)$$



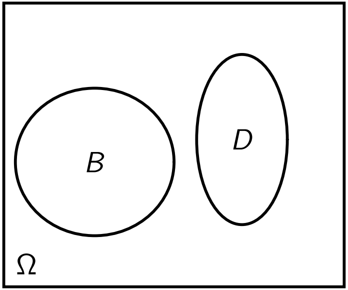
velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti

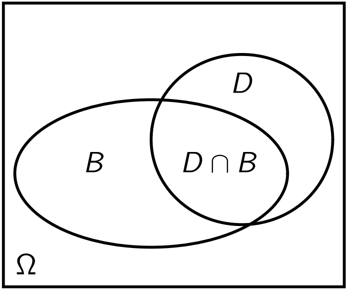
$B \cap D = \emptyset \Rightarrow$

$\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D)$

obecně platí

$\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(B \cap D)$





velikost plochy odpovídá pravděpodobnosti

pravděpodobnost

- objektivní číselné vyjádření „naděje“, že nastane jev B
- modelový protějšek relativní četnosti
- pravděpodobnost (pst) by měla mít stejné vlastnosti jako relativní četnost:
  - $\boxed{0 \leq \mathrm{P}(B) \leq 1}$
  - $\boxed{\mathrm{P}(\Omega) = 1, \mathrm{P}(\emptyset) = 0}$
  - $\boxed{B \cap D = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D)}$
    (sčítání pravděpodobností)
  - $\boxed{\mathrm{P}(B \cup D) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(B \cap D)}$
  - $\boxed{B \subset D \Rightarrow \mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(D)}$
  - $\boxed{\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B)}$

klasická definice pravděpodobnosti

- **klasická definice psti**
  - m **stejně pravděpodobných** elementárních jevů $\omega_1, \ldots, \omega_m$
  - jsou neslučitelné, sjednocení všech je jistý jev
  - m_B elementárních jevů **příznivých jevu** B
    (tj. takových ω_i, že $\omega_i \in B$, je právě m_B)

$$\boxed{\mathrm{P}(B) = \frac{m_B}{m}}$$

- **příklad**
  - hází se dvěma kostkami (modrá, zelená)
  - B – součet aspoň 10

$$m = 6 \cdot 6 = 36; \quad m_B = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{6}{36}$$

příznivé možnosti: (6,4), (6,5), (6,6), (5,5), (5,6), (4,6)

kombinační číslo

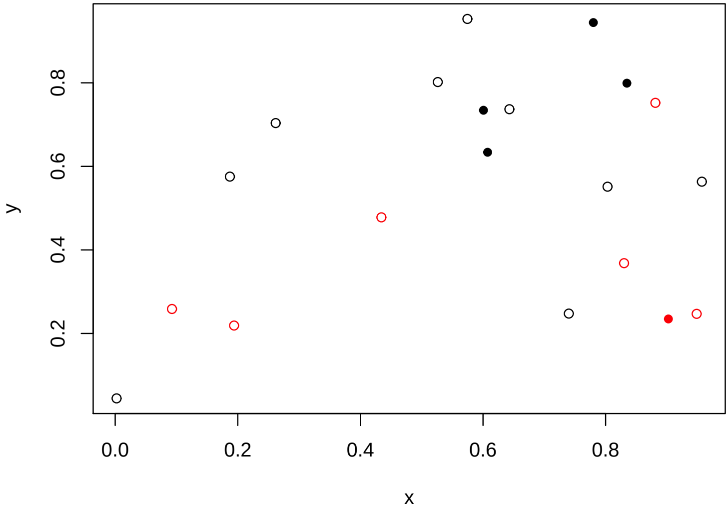
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$
- kolika způsoby lze z n rozlišitelných objektů vybrat nějakých k objektů *bez ohledu na pořadí*
- kolika způsoby lze z 5 studentů vybrat trojici na přezkoušení?

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1)} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$$

  - v čitateli je počet možností, kolika způsoby lze postupně (s ohledem na pořadí!) uspořádat všech 5 studentů
  - ve jmenovateli je součin dvou činitelů
  - první udává kolikrát lze uspořádat tři vybrané studenty
  - druhý udává kolikrát lze uspořádat dva nevybrané studenty
  - každá trojice vybraných studentů se kombinuje s každou dvojicí studentů nevybraných

Počítání ryb v rybníku

$$(m = 20), a = 7, n = 5, Y = 1 \Rightarrow \hat{m} = n \cdot a/Y = 35$$



hypergeometrické rozdělení

příklad na klasickou pravděpodobnost

- v rybníku je m ryb (zpravidla neznámý počet)
  a ryb vylovíme, označíme a vypustíme zpět
- po nějaké době vylovíme n ryb, z nich Y je označených
- číslo Y předem neznáme, je to **náhodná veličina**
- s jakou pravděpodobností je $Y = k$?
  - celkem $\binom{m}{n}$ možných n-tic vylovených ryb
  - k označených lze vybrat $\binom{a}{k}$ způsoby
  - $n - k$ neoznačených lze vybrat $\binom{m-a}{n-k}$ způsoby

$$P(Y = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{m-a}{n-k}}{\binom{m}{n}}, \qquad \max(0, n+a-m) \leq k \leq \min(a, n)$$

- např. odhad neznámého m: $\hat{m} = \dfrac{n \cdot a}{Y}$ (neboť $Y/n \doteq a/m$)

příklad ponožky

V noci vzbudili Kubu, že má jít hlídat tábor. Po tmě z pytlíku vytáhl **dvě** ponožky, aniž ověřil jejich barvu. Původně tam byly tři páry ponožek ze stejného materiálu: zelené, modré, šedivé.
Náhodné jevy a veličiny:

- A obě ponožky jsou stejné barvy
- B aspoň jedna obutá ponožka je zelená
- C aspoň jedna obutá ponožka je modrá
- D na pravé noze je zelená ponožka
- X počet obutých šedivých ponožek
- Y počet obutých modrých ponožek

příklad ponožky – výpočet pravděpodobností jevů

označení (z,m) znamená barvu postupně na levé a na pravé noze

možnosti vytáhnou **dvojici** ponožek: $m = 6 \cdot 5 = 30$

možnosti vytáhnout dvě zelené: $m_{z,z} = 2 \cdot 1 = 2$

možnosti vytáhnout zelenou a modrou: $m_{z,m} = 2 \cdot 2 = 4$

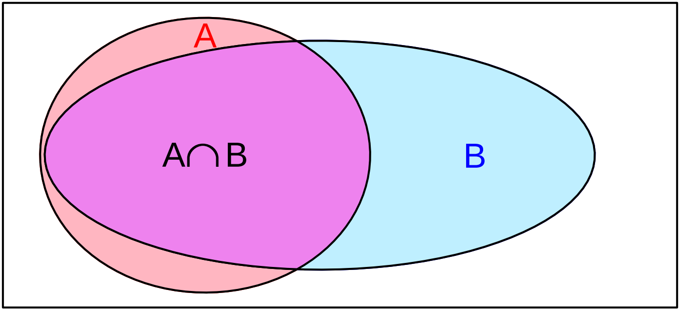
ω_i	$P(\omega_i)$	A	B	C	D	$B \cap C$	$B \cup C$	Y	X
(z,z)	1/15	•	•		•		•	0	0
(z,m)	2/15		•	•		•	•	1	0
(z,š)	2/15		•				•	0	1
(m,z)	2/15		•	•	•	•	•	1	0
(m,m)	1/15	•		•			•	2	0
(m,š)	2/15			•			•	1	1
(š,z)	2/15		•		•		•	0	1
(š,m)	2/15			•			•	1	1
(š,š)	1/15	•						0	2
pravděpodobnost		3/15	9/15	9/15	5/15	4/15	14/15		

$$P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{9}{15} + \frac{9}{15} - \frac{4}{15} = \frac{14}{15} = P(B \cup C)$$

podmíněná pravděpodobnost

Vennův diagram: když víme, že nastalo A (je to jisté, pst A za podmínky A je rovna 1), pak **podmíněná pst** jevu B za podmínky A bude rovna **relativní velikosti** $B \cap A$ **vzhledem k velikosti** A

$$\boxed{\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}}$$



příklad ponožky: s jakou pstí se Kuba obul rozumně?

- bez další informace: $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
- spolubydlící ve stanu Aleš se v noci vzbudil a v pytlíku viděl pár zelených ponožek

$$\mathrm{P}(A|\overline{B}) = \frac{\mathrm{P}(A \cap \overline{B})}{\mathrm{P}(\overline{B})} = \frac{2/15}{6/15} = \frac{1}{3} > \frac{1}{5} = \mathrm{P}(A)$$

- v pytlíku chyběla aspoň jedna modrá nebo aspoň jedna zelená

$$\mathrm{P}(A|(B \cup C)) = \frac{\mathrm{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathrm{P}(B \cup C)} = \frac{2/15}{14/15} = \frac{1}{7} < \frac{1}{5} = \mathrm{P}(A)$$

- na pravé noze má Kuba zelenou

$$\mathrm{P}(A|D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{1/15}{5/15} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \mathrm{P}(A)$$

nezávislost náhodných jevů

informace, že na pravé noze je zelená ponožka (jev D) neovlivnila pravděpodobnost jevu A (stejná barva ponožek)
jevy A a D jsou **nezávislé**

$$\mathrm{P}(A|D) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \mathrm{P}(A)$$

a tedy po odstranění zlomku v druhé rovnosti

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cap D) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D)}$$

definuje **nezávislost** náhodných jevů A a D
(informace o výskytu D neovlivnila pravděpodobnost jevu A)
vlastnost symetrická, nezávisí na pořadí

vlastnosti podmíněné pravděpodobnost

- pravděpodobnost jevu D za podmínky jevu C

$$\boxed{\mathrm{P}(D|C) = \frac{m_{D\cap C}}{m_C} = \frac{m_{D\cap C}/m}{m_C/m} = \frac{\mathrm{P}(D\cap C)}{\mathrm{P}(C)}}$$

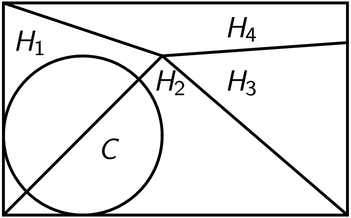
- pravděpodobnost průniku jevů D, C obecně

$$\mathrm{P}(D\cap C) = \mathrm{P}(D|C)\,\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(C\cap D) = \mathrm{P}(C|D)\,\mathrm{P}(D)$$

- ale $D\cap C = D\cap C$, proto $\quad \mathrm{P}(C\cap D) = \mathrm{P}(D\cap C)$
- odtud shoda pravých stran $\quad \mathrm{P}(D|C)\,\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C|D)\,\mathrm{P}(D)$
- vyděl $\mathrm{P}(C) \Rightarrow$ **Bayesův vzorec**: $\quad \boxed{\mathrm{P}(D|C) = \frac{\mathrm{P}(C|D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(C)}}$

vzorec pro úplnou pst, Bayesův vzorec

počítáme $\mathrm{P}(H_1|C)$, např. C – správná odpověď, H_j – správná známka j



$$\mathrm{P}(H_1) = 0{,}231$$
$$\mathrm{P}(H_2) = 0{,}375$$
$$\mathrm{P}(H_3) = 0{,}219$$
$$\mathrm{P}(H_4) = 0{,}175$$
$$\mathrm{P}(C|H_1) = 0{,}589$$
$$\mathrm{P}(C|H_2) = 0{,}362 \quad (\text{proč je } \mathrm{P}(C|H_2) < \mathrm{P}(C|H_1)?)$$

$$\mathrm{P}(C \cap H_1) = \mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1), \quad \mathrm{P}(C \cap H_2) = \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)$$
$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C \cap H_1) + \mathrm{P}(C \cap H_2) = 0{,}136 + 0{,}136 = 0{,}272$$
$$\mathrm{P}(H_1 \cap C) = \mathrm{P}(H_1|C)\,\mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(H_1|C) = \frac{\mathrm{P}(H_1 \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1)}{\mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2)} = \frac{1}{2}$$

obecný vzorec pro úplnou pravděpodobnost

(totéž, ale obecně))

- $H_1, \ldots, H_k$ neslučitelné (tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pro $i \neq j$)
- sjednocení $H_1, \ldots, H_k$ dá jev jistý (tj. $H_1 \cup \ldots \cup H_k = \Omega$)

z definice podmíněné psti plyne $\mathrm{P}(C \cap H_j) = \mathrm{P}(C|H_j) \cdot \mathrm{P}(H_j)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(C \cap \Omega) = \mathrm{P}(C \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k)) \\
&= \mathrm{P}((C \cap H_1) \cup (C \cap H_2) \cup \ldots \cup (C \cap H_k)) \text{ (neslučitelné jevy)} \\
&= \mathrm{P}(C \cap H_1) + \mathrm{P}(C \cap H_2) + \ldots + \mathrm{P}(C \cap H_k) \\
&= \mathrm{P}(C|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(C|H_2)\,\mathrm{P}(H_2) + \ldots + \mathrm{P}(C|H_k)\,\mathrm{P}(H_k)
\end{aligned}$$

tedy obecně $$\boxed{\mathrm{P}(C) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(C|H_j)\,\mathrm{P}(H_j)}$$

$\mathrm{P}(C)$ je **váženým průměrem** podmíněných pstí $\mathrm{P}(C|H_j)$

Bayesův vzorec [Bayes formula]

stejné předpoklady: H_j neslučitelné, sjednocení všech jistý jev

$$P(H_i|C) = \frac{P(H_i \cap C)}{P(C)}, \qquad P(C|H_i) = \frac{P(C \cap H_i)}{P(H_i)}$$

odtud je pro libovolně zvolené i

$$P(H_i \cap C) = P(C \cap H_i) = P(C|H_i)\,P(H_i)$$

proto pro každé i, $i = 1, \dots, k$ platí

$$\boxed{P(H_i|C) = \frac{P(H_i \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|H_i)\,P(H_i)}{P(C)} = \frac{P(C|H_i)\,P(H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(C|H_j)\,P(H_j)}}$$

$H_1, \dots, H_k$ – **hypotézy**, $P(H_1|C), \dots, P(H_k|C)$ – **aposteriorní** psti
$P(H_1), \dots, P(H_k)$ – **apriorní** psti (nutně $P(H_1) + \dots + P(H_k) = 1$)

příklad: zkoušení

H_j – student si zaslouží známku j, učitel studenta (tedy j) nezná
C – student správně odpoví na položenou otázku
$\mathrm{P}(H_j)$ – apriorní představa učitele o neznámém studentovi
$\mathrm{P}(C|H_j)$ – obtížnost otázky, volí učitel

H_j	$\mathrm{P}(H_j)$	$\mathrm{P}(C\|H_j)$	$\mathrm{P}(C\|H_j)\,\mathrm{P}(H_j)$	$\mathrm{P}(H_j\|C)$	$\mathrm{P}(H_j\|C_2)$	$\mathrm{P}(H_j\|C_3)$
1	0,20	1,00	0,2000	0,2694	0,3451	0,4230
2	0,35	0,80	0,2800	0,3771	0,3865	0,3790
3	0,25	0,65	0,1625	0,2189	0,1822	0,1452
4	0,20	0,50	0,1000	0,1347	0,0863	0,0529
Σ	1,00		0,7425	1,0000	1,0000	1,0000

$\mathrm{P}(C) = 0{,}7425$

podobně C_2, C_3 správné odpovědi na další stejně obtížné otázky, když použijeme předchozí aposteriorní psti jako apriorní

senzitivita, specificita, prevalence

- D – subjekt je nemocen, **prevalence** – podíl nemocných v populaci $\mathrm{P}(D)$, zvolme $\mathrm{P}(D) = 0{,}001$
- nemoc je skrytá, vyhledáváme ji pomocí testu s vlastnostmi:
  - $\mathrm{P}(T|D)$ – pravděpodobnost pozitivního výsledku u nemocného (**senzitivita**, pokud možno velká, zvolme $\mathrm{P}(T|D) = 0{,}98$, na test pozitivně reaguje 98 % nemocných)
  - $\mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D})$ – pravděpodobnost negativního výsledku u zdravého (**specificita**, pokud možno velká, zvolme $\mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D}) = 0{,}99$, na test pozitivně reaguje jen $\mathrm{P}(T|\overline{D}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D}) = 1$ % zdravých)

senzitivita, specificita, prevalence

- jaká je pst, že pozitivně reagující je opravdu nemocný?

$$\mathrm{P}(D|T) = \frac{\mathrm{P}(T|D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(T|D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(T|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D})}$$
$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}001}{0{,}98 \cdot 0{,}001 + 0{,}01 \cdot 0{,}999} \doteq 0{,}089$$

- jaká je pst, že jde o zdravého člověka v případě, že test byl negativní?

$$\mathrm{P}(\overline{D}|\overline{T}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D})}{\mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D})\,\mathrm{P}(\overline{D}) + \mathrm{P}(\overline{T}|D)\,\mathrm{P}(D)}$$
$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}999}{0{,}99 \cdot 0{,}999 + 0{,}02 \cdot 0{,}001} = 0{,}99998$$

- porovnej s apriorními pstmi: 0,001 resp. 0,999

senzitivita, specificita, prevalence

numerická představa

- mějme $N = 1\,000\,000$ osob
- pak je **zhruba** $N \cdot \mathrm{P}(D) = 1\,000$ nemocných, z nich
  - $1\,000 \cdot \mathrm{P}(T|D) = 980$ pozitivních
  - $1\,000 \cdot (1 - \mathrm{P}(T|D)) = 20$ negativních
- podobně je zhruba $N \cdot (1 - \mathrm{P}(D)) = 999\,000$ zdravých, z nich je
  - $999\,000 \cdot (1 - \mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D})) = 9\,990$ pozitivních
  - $999\,000 \cdot \mathrm{P}(\overline{T}|\overline{D})) = 989\,010$ negativních
- mezi $980 + 9\,990 = 10\,970$ pozitivnímimi je $100 \cdot 980/10\,970 = 8{,}9$ % nemocných
- mezi $20 + 98\,9010 = 989\,030$ negativními je $100 \cdot 989\,010/989\,030 = 99{,}998$ % zdravých

náhodná veličina

[random variable]

- číselně vyjádřený výsledek náhodného pokusu
- předem nevíme, který výsledek vyjde, známe jen
  - možné hodnoty
  - jejich pravděpodobnosti
- každému elementárnímu jevu přiřadíme reálné číslo
- **diskrétní rozdělení** náhodné veličiny X
  - model pro počty případů (četnosti)
  - možné hodnoty $x_1^*, x_2^*, \ldots$
  - psti hodnot $\mathrm{P}(X = x_1^*), \mathrm{P}(X = x_2^*), \ldots$ (pstní funkce)
- **spojité rozdělení** náhodné veličiny X
  - model pro spojitou veličiny (délka, váha, koncentrace . . .)
  - obor (množina) možných hodnot X
  - hustota $f(x)$

příklad: ponožky

X a Y mají **stejné rozdělení**

náhodná veličina Y – počet modrých ponožek
rozdělení Y dáno hodnotami y_j^* a pstmi těchto hodnot $\mathrm{P}(Y = y_j^*)$
náhodná veličina X – počet šedivých ponožek
rozdělení X dáno hodnotami x_j^* a pstmi těchto hodnot $\mathrm{P}(X = x_j^*)$

ω_i	$\mathrm{P}(\omega_i)$	Y	X
(z,z)	1/15	0	0
(z,m)	2/15	1	0
(z,š)	2/15	0	1
(m,z)	2/15	1	0
(m,m)	1/15	2	0
(m,š)	2/15	1	1
(š,z)	2/15	0	1
(š,m)	2/15	1	1
(š,š)	1/15	0	2

j	x_j^*	$\mathrm{P}(X = x_j^*)$
1	**0**	2/15+4/15=**6/15**
2	**1**	0/15+8/15=**8/15**
3	**2**	1/15+0/15=**1/15**

j	y_j^*	$\mathrm{P}(Y = y_j^*)$
1	**0**	2/15+4/15=**6/15**
2	**1**	0/15+8/15=**8/15**
3	**2**	1/15+0/15=**1/15**

▸ Střední hodnota

distribuční funkce

protějšek empirické distribuční funkce (str. 19),[(cumulative) distribution function]

- pst, že X nepřekročí x $\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)}$
- diskrétní rozdělení: $\boxed{F(x) = \sum_{k \leq x} \mathrm{P}(X = k)}$
- spojité rozdělení: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, kde $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$
- vlastnosti distribuční funkce

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

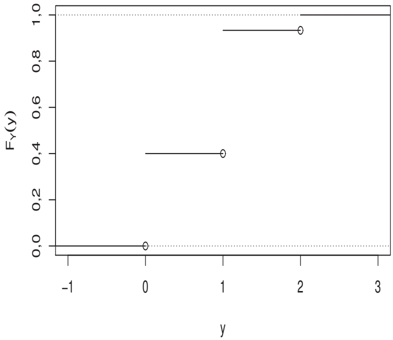
neklesající: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

$$\boxed{\mathrm{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

příklad diskrétního rozdělení

rozdělení počtu modrých ponožek Y

j	y_j^*	$\mathrm{P}(Y = y_j^*)$	$F_Y(y_j^*)$
1	0	6/15	6/15=0,400
2	1	8/15	14/15≐0,933
3	2	1/15	15/15=1,000



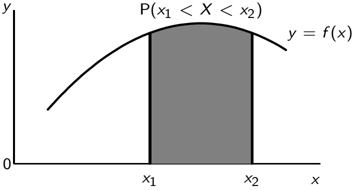
hustota spojitého rozdělení

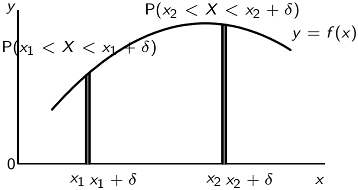
[density function]

- nechť $f(x)$ je hustota náhodné veličiny X
- hustota je nezáporná, plocha pod celou hustotou je rovna jedné

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

- plocha pod hustotou nad intervalem x_1, x_2 je rovna pravděpodobnosti, že X je mezi x_1, x_2



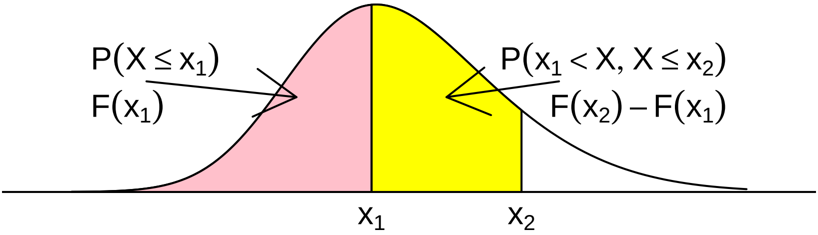


geometrický význam hustoty

$P(x_1 < X, X <= x_2) = P(x_1 < X <= x_2)$, vpravo stručnější, používaný zápis

$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$
$$= F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

odtud $\boxed{P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

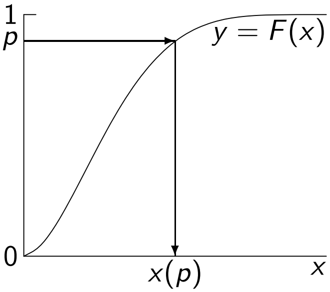


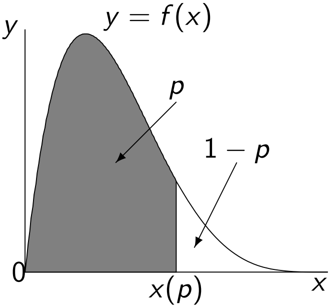
p-kvantil $x(p)$

- $x(p)$ je hodnota, pod kterou je $100p$ procent pravděpodobnosti

$$\boxed{P(X \leq x(p)) = p}$$

- populační protějšek percentilu
- např. [qnorm(0.975)] dá $1{,}959964 \doteq 1{,}96$





střední hodnota

pokračujeme v idealizovaných představách

- míra polohy, očekávaná hodnota [expected value, mean value]
- metoda výpočtu se značí $\mathrm{E}\, X$
- vypočtená hodnota se značí μ nebo úplněji μ_X
- **vážený průměr možných hodnot**
- ideální protějšek výběrového průměru
- diskrétní rozdělení: vahami jsou pravděpodobnosti

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}\, X = \sum_j x_j^* \, \mathrm{P}(X = x_j^*)}$$

- spojité rozdělení: místo vah je hustota $f_X(x)$

$$\mu_X = \mathrm{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f_X(x) \mathrm{d}x$$

- praktická představa střední hodnoty: průměr celé populace možných hodnot, tedy **populační průměr**

příklad ponožky

X – počet modrých ponožek

j	x_j^*	$\mathrm{P}(X = x_j^*)$	$x_j^* \cdot \mathrm{P}(X = x_j^*)$
1	0	$6/15$	0
2	1	$8/15$	$8/15$
3	2	$1/15$	$2/15$
součet		$15/15$	$10/15$

$$\mu_X = 0 \cdot \frac{6}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

▸ Náhodná veličina

(populační) rozptyl σ^2, (populační) směrodatná odchylka σ

[variance, standard deviation]

- míra variability, **populační rozptyl, popul. směr. odchylka**
- udává velikost kolísání (variabilitu) kolem střední hodnoty
- metoda výpočtu se značí $\operatorname{var} X$
- vypočtená hodnota σ^2, úplněji σ_X^2
- lze vyjádřit pomocí střední hodnoty

$$\sigma_X^2 = \operatorname{var} X = \mathrm{E}\,(X - \mu_X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mu_X)^2$$

- σ_X^2 – ideální protějšek výběrového rozptylu
- σ_X – ideální protějšek výběrové směrodatné odchylky
- diskrétní rozdělení

$$\boxed{\sigma_X^2 = \operatorname{var} X = \sum_j \left(x_j^* - \mu_X\right)^2 \mathrm{P}\left(X = x_j^*\right)}$$

- spojité rozdělení $\quad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) \mathrm{d}x$

příklad ponožky

X – počet šedivých ponožek, $\mu_X = 2/3$

j	x_j^*	$\mathrm{P}(X = x_j^*)$	$x_j^* - \mu_X$	$(x_j^* - \mu_X)^2$	$(x_j^* - \mu_X)^2\,\mathrm{P}(X = x_j^*)$
1	0	6/15	–2/3	4/9	24/135
2	1	8/15	1/3	1/9	8/135
3	2	1/15	4/3	16/9	16/135
$\sum$		15/15	???		48/135=16/45

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \sum_j (x_j^* - \mu_X)^2 p_j \\
&= (0 - 2/3)^2 \cdot 6/15 + (1 - 2/3)^2 \cdot 8/15 \\
&\quad + (2 - 2/3)^2 \cdot 1/15 = 16/45 \doteq 0{,}356 \\
\sigma_X &= \sqrt{16/45} \quad \doteq \quad 0{,}596
\end{aligned}$$

sdružené rozdělení

- abychom mohli popsat **závislost** náhodných veličin, zajímáme se o **společné** chování dvojice (trojice,…) náhodných veličin, tedy chování **náhodného vektoru**
- příklad **ponožky**
  - X – počet šedivých ponožek
  - Y – počet modrých
  - Z – počet jiných než šedivých ponožek
- zajímá nás rozdělení náhodného vektoru (X, Y)
- proč nemá smysl vyšetřovat **vektor** (X, Z)?
- (protože Z je určeno X jednoznačně: $Z = 2 - X$)

příklad ponožky

X šedivých ponožek, Y počet modrých ponožek

sdružené pravděpodobnosti, marginální pravděpodobnosti, podmíněné pravděpodobnosti Y při daném $X = x$

ω_i	$P(\omega_i)$	Y	X
(z,z)	1/15	0	0
(z,m)	2/15	1	0
(z,š)	2/15	0	1
(m,z)	2/15	1	0
(m,m)	1/15	2	0
(m,š)	2/15	1	1
(š,z)	2/15	0	1
(š,m)	2/15	1	1
(š,š)	1/15	0	2

x_i^*	y_j^* 0	1	2	celkem
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0/15	8/15
2	1/15	0/15	0/15	1/15
	6/15	8/15	1/15	15/15

x_i^*	y_j^* 0	1	2	celkem
0	1/6	4/6	1/6	1
1	3/6	3/6	0/6	1
2	6/6	0	0	1

sdružené, marginální a podmíněné rozdělení

sdružené rozdělení – popisuje **společné chování** X, Y

$$\boxed{\mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*)} \text{ resp. } \boxed{f_{X,Y}(x,y)}$$

marginální rozdělení: chování jedné bez ohledu na hodnotu druhé

$$\boxed{\mathrm{P}(X = x_i^*) = \sum_j \mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*) \qquad \forall x_i^*}$$

$$\boxed{\mathrm{P}(Y = y_j^*) = \sum_i \mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*) \qquad \forall y_j^*}$$

podmíněné rozdělení: chování Y při **dané** hodnotě X

$$\mathrm{P}(Y = y_j^* | X = x_i^*) = \frac{\mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*)}{\mathrm{P}(X = x_i^*)}$$

kovariance

protějšek s_{xy} (str. 37), [covariance]

kovariance vyjadřuje vzájemnou závislost náhodných veličin:

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{E}(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$$

$$\boxed{\sigma_{X,Y} = \sum_i \sum_j (x_i^* - \mu_X)(y_j^* - \mu_Y)\,\mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*)}$$

označení metody výpočtu: $\mathrm{cov}(X, Y)$

zřejmě platí $\boxed{\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}\, X}$ tj. $\boxed{\sigma_{X,X} = \sigma_X^2}$

náhodné veličiny jsou **nezávislé** právě tehdy, když jsou nezávislé všechny jevy A (tvrzení o X) a B (tvrzení o Y), tj. když platí

$$\boxed{\mathrm{P}(X = x_i^*, Y = y_j^*) = \mathrm{P}(X = x_i^*) \cdot \mathrm{P}(Y = y_j^*), \qquad \forall (x_i^*, y_j^*)}$$

(ze znalosti hodnoty jedné veličiny nic nevíme o druhé)

jsou-li X, Y – nezávislé $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{X,Y} = 0}$ (nikoliv obrácená implikace)

shrnutí vlastností populačního průměru a rozptylu

srovnej s požadavky na míry polohy a míry variability

$$\mu_{\alpha+X} = \alpha + \mu_X, \qquad \mu_{\beta X} = \beta \cdot \mu_X,$$
$$\sigma^2_{\alpha+X} = \sigma^2_X, \qquad \sigma^2_{\beta X} = \beta^2 \cdot \sigma^2_X,$$
$$\sigma_{\alpha+X} = \sigma_X, \qquad \sigma_{\beta X} = |\beta| \cdot \sigma_X,$$

pro součet náhodných veličin $X + Y$ dále platí

$$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\sigma_{XY} \qquad \text{obecně}$$
$$\sigma_{X,Y} = 0 \qquad \text{pro nezávislé } X, Y$$
$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \qquad \text{pro nezávislé } X, Y$$

$\mu_X, \sigma_X, \ldots$ jsou konstanty, vyjadřují (charakterizují) polohu, variabilitu . . . náhodné veličiny X

ukázka důkazu

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha+\beta X} &= \mathrm{E}(\alpha+\beta X) \\
&= \sum_i (\alpha+\beta x_i^*)\,\mathrm{P}(X=x_i^*) \\
&= \sum_i \alpha\,\mathrm{P}(X=x_i^*) + \sum_i \beta x_i^*\,\mathrm{P}(X=x_i^*) \\
&= \alpha \sum_i \mathrm{P}(X=x_i^*) + \beta \sum_i x_i^*\,\mathrm{P}(X=x_i^*) \\
&= \alpha + \beta\cdot \mathrm{E}\,X = \alpha+\beta\cdot\mu_X
\end{aligned}$$

normování náhodné veličiny X (populační obdoba z-skórů)

$$Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \qquad \text{(bezrozměrné!)}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu_Z = 0, \qquad \sigma_Z = 1$$

charakteristiky založené na normované verzi I

charakteristiky X nezávislé na μ_X a σ_X, protějšky popisných statistik

- (populační) **korelační koeficient** [correlation coefficient]

$$\rho_{XY} = \operatorname{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

- připomeňme: jsou-li náhodné veličiny X a Y **nezávislé**, platí $\operatorname{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = 0$
- jsou-li náhodné veličiny X a Y **nezávislé**, je nutně $\rho_{XY} = 0$
- předchozí tvrzení nic neříká o závislých náhodných veličinách
- pro **závislé** náhodné veličiny **může** vyjít $\rho_{XY} = 0$
- je-li $\rho_{XY} \neq 0$, pak X, Y nemohou být nezávislé, jsou nutně závislé
- vždy platí $\boxed{-1 \leq \rho_{XY} \leq 1}$

příklad ponožky

x_i^*	y_j^* 0	1	2	celkem
0	1/15	4/15	1/15	6/15
1	4/15	4/15	0/15	8/15
2	1/15	0/15	0/15	1/15
	6/15	8/15	1/15	15/15

$$\mu_X = \mu_Y = 2/3 \qquad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 48/135 = 16/45$$

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= (0-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 1/15 + (0-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 4/15\\ &+ (0-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 1/15 + (1-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 4/15\\ &+ (1-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 4/15 + (1-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 0/15\\ &+ (2-2/3)\cdot(0-2/3)\cdot 1/15 + (2-2/3)\cdot(1-2/3)\cdot 0/15\\ &+ (2-2/3)\cdot(2-2/3)\cdot 0/15 = -24/135 \doteq -0{,}177\end{aligned}$$

X, Y jsou závislé, neboť např.
$6/15 \cdot 8/15 \doteq 0{,}213 < 4/15 \doteq 0{,}267, \qquad \rho_{X,Y} = -1/2$

charakteristiky založené na normované verzi II

charakteristiky X nezávislé na μ_X a σ_X, protějšky popisných statistik

- (populační) **šikmost** náhodné veličiny X [skewness]

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^3 = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)^3}{\sigma_X^3}$$

- (populační) **špičatost** náhodné veličiny X (někdy bez -3) [kurtosis]

$$\gamma_2 = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^4 - 3 = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)^4}{\sigma_X^4} - 3$$

příklad ponožky

x^*	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x^*)$	$6/15$	$8/15$	$1/15$

stř. hodnota, rozptyl: $\mu = 2/3$, $\sigma^2 = 16/45$, $\sigma = 4/(3\sqrt{5})$

šikmost

$$\mathrm{E}(X-\mu)^3 = \frac{6}{15}\left(0-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{8}{15}\left(1-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{15}\left(2-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{135}$$

$$\gamma_1 = \frac{8}{135}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^3 = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

špičatost podobně

$$\gamma_2 = \ldots = \frac{8}{27}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}\right)^4 - 3 = \frac{75}{32} - 3 = -\frac{21}{32}$$

alternativní rozdělení

nula-jedničkové, Bernoulliovo

- X – **počet zdarů** v jednom pokusu
- pravděpodobnost zdaru π, $0 < \pi < 1$
- π je jediný parametr
- pouze dvě možné hodnoty: 1 (nastal zdar), 0 (nezdar)
- $P(X = 1) = \pi, \qquad P(X = 0) = 1 - \pi$
- X je vlastně počet zdarů v onom pokusu
- $X \sim \text{alt}(\pi)$
- $\mu_X = \operatorname{E} X = 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1 - \pi) = \pi$
- $$\sigma_X^2 = \operatorname{var} X = \operatorname{E}(X - \mu_X)^2 = (1-\pi)^2 \cdot \pi + (0-\pi)^2 \cdot (1-\pi) = \pi(1-\pi)$$

binomické rozdělení

[binomial distribution]

- n **nezávislých** pokusů, v nichž rozlišujeme pouze zdar a nezdar
- $\mathrm{P}(\text{zdar}) = \pi$, $(0 < \pi < 1)$
- Y je **počet zdarů** v těchto pokusech
- možné hodnoty: 0, 1, ...,n
- $\boxed{\mathrm{P}(Y = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n}$

  [dbinom(k,n,prob)]
- $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi)$
- např. ze 7 vajíček se vylíhne Y slepiček, $Y \sim \mathrm{bi}(7, 1/2)$
- např. při 60 hodech kostkou padlo Y šestek, $Y \sim \mathrm{bi}(60, 1/6)$
- předem nevíme, kolik bude slepiček (šestek), ale v dlouhodobém průměru je relativní četnost blízká 1/2 (1/6)

binomické rozdělení pomocí alternativního rozdělení

- $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi)$
- Y je celkový počet zdarů v n pokusech, tedy
- $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$,
  kde X_i je počet zdarů v i-tém pokusu
- z vlastností střední hodnoty (očekávaný počet zdarů)

$$\mu_Y = \mathrm{E}\, Y = \mathrm{E} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\, X_i = \sum_{i=1}^{n} \pi = n\pi$$

- protože jsou pokusy **nezávislé**, platí

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\, X_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(1-\pi) = n\pi(1-\pi)$$

příklad: kuřáci

- mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků ($\pi = 0{,}35$)
- je-li dvacetiletých 70 tisíc ($m = 70\ 000$), pak je kuřáků asi $m\pi = 70\ 000 \cdot 0{,}35 = 24\ 500$, ale nevíme, kteří to jsou
- vyberme náhodně $n = 60$ dvacetiletých mužů, označme jako Y počet kuřáků mezi nimi, je tedy $Y \sim \mathrm{bi}(60, 0{,}35)$
- střední hodnota (očekávaný počet), rozptyl

$$\mu_Y = 60 \cdot 0{,}35 = 21 \qquad \sigma_Y^2 = 60 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 13{,}65 \doteq (3{,}7)^2$$

- ukázky pravděpodobností možných hodnot

k	15	17	19	21	23	25
$P(Y = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

- pravděpodobnosti počítány pomocí [dbinom(c(15,17,19,21,23,25),60,0.35)]

Poissonovo rozdělení

[Poisson distribution]

- $X \sim \mathrm{Po}(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$
- zákon vzácných (řídkých) jevů
- kolikrát nastal jev během jednotkového časového intervalu, na jednotkové ploše, v jednotkovém objemu ...
- předpokládá se, že počet výskytů jevu v jednom intervalu **nezávisí** na počtu výskytu jevu v jiném intervalu
- $\boxed{\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}}, \qquad k = 0, 1, \ldots$
- $\mu_X = \lambda$, $\sigma_X^2 = \lambda$
- při nestejných intervalech, objemech ... je parametr úměrný velikosti intervalu ... (např. λt u časového intervalu délky t)
- pro velké n a malé π lze rozdělení $\mathrm{bi}(n, \pi)$ aproximovat pomocí rozdělení $\mathrm{Po}(n\pi)$
- např. počet kolonií na Petriho misce

příklad

souvislost binomického a Poissonova rozdělení

s jakou pstí udělá 5 z 55 studentů zkoušku na výbornou, je-li populace studentů charakterizována tím, že pst jedničky 0,08?

- binomické rozdělení $Y \sim \mathrm{bi}(55, 0{,}08)$ [dbinom(5,55,0.08)]

$$P(Y = 5) = \binom{55}{5} \cdot 0{,}08^5 \cdot 0{,}92^{50} = 0{,}176$$

- aproximace Poissonovým rozdělením (použij $\lambda = n\pi = 4{,}4$) $Y \sim \mathrm{Po}(55 \cdot 0{,}08) = \mathrm{Po}(4{,}4)$ [dpois(5, 4.4)]

$$P(Y = 5) = \frac{4{,}4^5}{5!} e^{-4{,}4} = 0{,}169$$

normální (Gaussovo) rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

[normal (Gaussian) distribution]

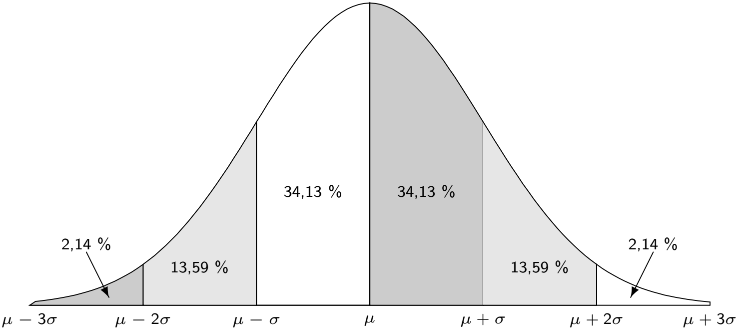
- $\boxed{\mu_X = \mu,\ \sigma_X^2 = \sigma^2}$
- spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty μ
- maximální hodnota hustoty přibližně $0{,}4/\sigma$
- $\mathrm{N}(0,1)$ (normované normální rozdělení):
  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (hustota),
  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \mathrm{d}t$ (distr. fce)
- $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$\boxed{\mathrm{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

- model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků
- velmi často modeluje znaky v poměrovém měřítku

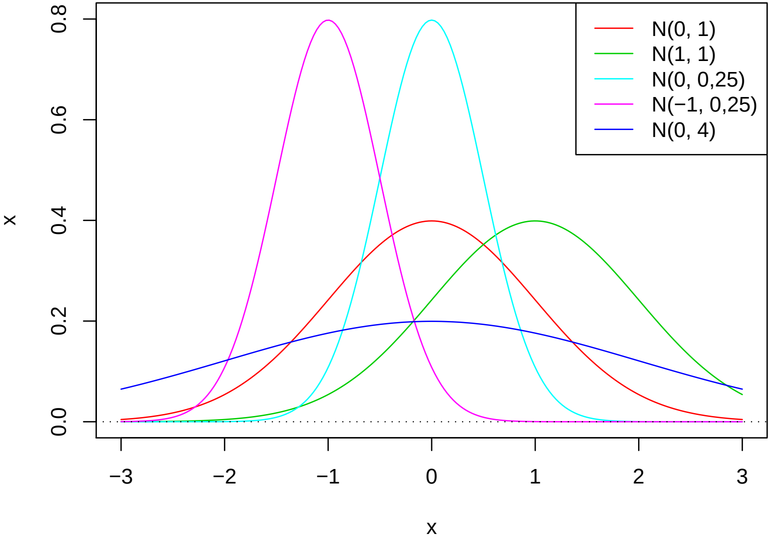
graf hustoty N(μ, σ^2)

výpočet hustoty: [dnorm(x,mu,sigma)]



normální (Gaussovo) rozdělení N(μ, σ^2)

význam parametrů



výpočet pravděpodobnosti, že $a < X < b$

pomocí distribuční funkce N(0, 1)

$$\mathrm{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) \qquad \text{platí obecně pro spoj. rozděl.}$$

$$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

[pnorm((b-mu)/sigma)-pnorm((a-mu)/sigma)]

v programu R je distribuční funkce $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ s obecnými parametry:

[pnorm(b,mu,sigma)-pnorm(a,mu,sigma)]

příklad

- u jakého dílu populace desetiletých hochů naměříme výšku od 135 do 140 cm, když pro výšku desetiletých platí $X \sim \mathrm{N}\big(136{,}1, 6{,}4^2\big)$
- předpokládáme zaokrouhlování na celá čísla při měření, takže hodnoty od 135 cm do 140 cm naměříme, když měřené výšky budou od 134,5 cm do 140,5 cm:

$$\mathrm{P}(134{,}5 < X < 140{,}5) = \Phi\left(\frac{140{,}5 - 136{,}1}{6{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{134{,}5 - 136{,}1}{6{,}4}\right)$$
$$= 0{,}754 - 0{,}401 = 0{,}353$$

[pnorm((140.5-136.1)/6.4)-pnorm((134.5-136.1)/6.4)]

- pomocí distribuční fce s obecnými parametry [pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

kvantily normálního a Studentova t-rozdělení

[Student distribution]

- **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$ [qnorm(1-alpha)]

  $Z \sim \mathrm{N}(0,1): \quad \mathrm{P}(Z < z(1-\alpha)) = 1-\alpha \quad \mathrm{P}(Z > z(1-\alpha)) = \alpha$

  ze symetrie platí $\mathrm{P}(|Z| > z(1-\alpha/2)) = \alpha$

- **Studentovo t-rozdělení s k stupni volnosti** t_k (podobné normálnímu, protože místo σ používá jeho odhad, má větší rozptyl)

  $$T \sim \mathrm{t}_k: \quad \mathrm{P}(|T| > t_k(1-\alpha/2)) = \alpha$$

  [qt(1-alpha/2,k)]

některé kritické hodnoty

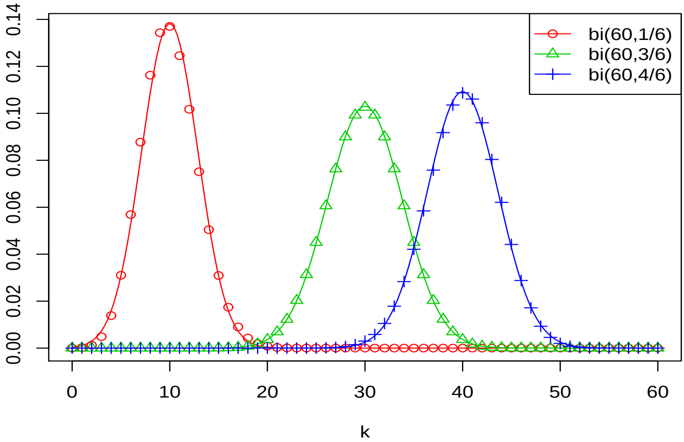
α	0,50	0,25	0,10	**0,05**	0,01
$z(1-\alpha/2)$	0,674	1,150	1,645	**1,960**	2,576
$t_{100}(1-\alpha/2)$	0,677	1,157	1,660	**1,984**	2,626
$t_{20}(1-\alpha/2)$	0,687	1,185	1,725	**2,086**	2,845
$t_5(1-\alpha/2)$	0,727	1,301	2,015	**2,571**	4,032

- $T \sim \mathrm{t}_k$ má jediný parametr k (počet stupňů volnosti)
- s rostoucím k se chování blíží normálnímu rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$
- pro $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ je 95 % hodnot v intervalu $(-1{,}960; 1{,}960)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_5$ je 95 % hodnot v intervalu $(-2{,}571; 2{,}571)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_{20}$ je 95 % hodnot v intervalu $(-2{,}086; 2{,}086)$
- pro $T \sim \mathrm{t}_{100}$ je 95 % hodnot v intervalu $(-1{,}984; 1{,}984)$

aproximace binomického rozdělení normálním

se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem

rozdělení bi(n, π) lze aproximovat pomocí N$(n\pi, n\pi(1-\pi))$



další rozdělení související s normálním

[F-distribution, chi-square distribution]

- V má rozdělení (musí být $\mathrm{P}(V > 0) = 1$!!)
  logaritmicko-normální, platí-li $\boxed{\ln V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)}$
- **Fisherovo F-rozdělení** $\mathrm{F}_{k,m}$ [qf(1-alpha,k,m)]

$$F \sim \mathrm{F}_{k,m} : \quad \mathrm{P}(F > F_{k,m}(1-\alpha)) = \alpha$$

- **rozdělení chí-kvadrát** χ^2_k [qchisq(1-alpha,k)]

$$X^2 \sim \chi^2_k : \quad \mathrm{P}(X^2 > \chi^2_k(1-\alpha)) = \alpha$$

- speciálně platí:
  - $\chi^2_1(0{,}95) = 3{,}841 = 1{,}960^2$
  - $\chi^2_1(1-\alpha) = (z(1-\alpha/2))^2$
  - $F_{1,m}(1-\alpha) = (t_m(1-\alpha))^2$

příklad: věk matek (motivační příklad)

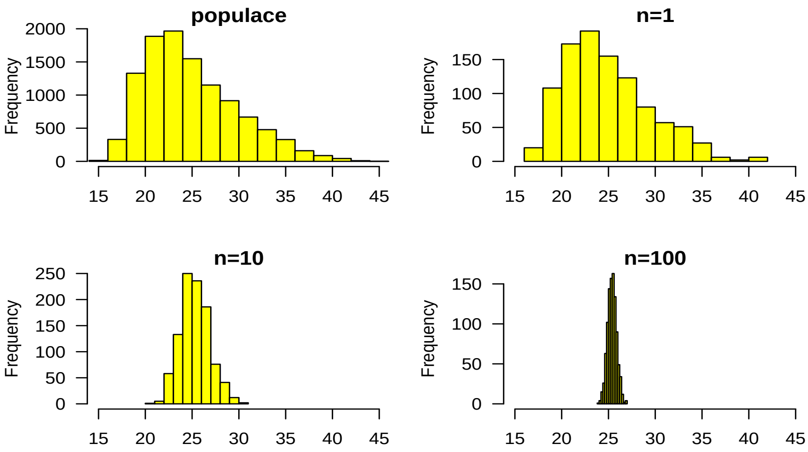
nepřehlédněte slova **populace, populační**

- velká **populace** dětí (a tedy jejich matek, téměř 11 tisíc)
- **známe populační průměr** μ věku matek
- když náhodně vybereme matku (dítě), její věk je náhodná veličina se střední hodnotou μ
- náhodně vybráno 1000 matek (vlastně průměry výběrů rozsahu $n = 1$), nakreslen histogram
- 1000 krát náhodně vybráno vždy $n = 10$ matek, vždy spočítán **výběrový** průměr, nakreslen histogram **výběrových** průměrů
- 1000 krát náhodně vybráno vždy $n = 100$ matek, spočítán **výběrový** průměr, nakreslen histogram **výběrových** průměrů
- podle teorie by každý další rozptyl ze 1000 **výběrových** průměrů měl být desetkrát menší než ten založený na desetkrát menším n
- skutečné rozptyly (odhady z 1000 realizací): 23,5; 2,20; 0,21

příklad: věk matek (umělá situace)

populace - 10 916 matek, opakované výběry rozsahu $n = 1, 10, 100$

je patrná variabilita klesající s rostoucím n



příklad: věk matek

průměrný věk matek v opakovaných výběrech, počet opakování $B = 1000$
(20. března 2012 některé hodnoty opraveny)

rozsah výběru n	průměr průměrů	směr. odch. průměrů	rozptyl průměrů	rozptyl průměrů teoreticky
1	25,42	4,625	21,388	24,428
10	25,35	1,544	2,385	2,443
100	25,39	0,480	0,231	0,244
1000	25,40	0,150	0,022	0,024
populace	$\mu =$25,40	$\sigma =$4,932	$\sigma^2 =$24,428	

průměr z náhodného výběru

nemusí jít o normální rozdělení!

- $X_1, \ldots, X_n$ **nezávislé**, mají stejné rozdělení **náhodný výběr**
  $\mu_{X_i} = \operatorname{E} X_i = \mu$ (stejná střední hodnota) populační průměr
  $\sigma^2_{X_i} = \operatorname{var} X_i = \sigma^2$ (stejný rozptyl) populační rozptyl
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ výběrový průměr
- $\mu_{\bar{X}} = \operatorname{E} \bar{X} = \mu$
  - výběrový průměr $\bar{X}$ je opět náhodná veličina
  - je **nestranným** odhadem [unbiased estimator] parametru μ
  - nestranným odhadem populačního průměru (střední hodnoty)
  - když pořizujeme výběry opakovaně, průměry kolísají kolem skutečné hodnoty populačního průměru
- z příkladu víme, že rozptyl $\bar{X}$ závisí na n

rozptyl průměru z náhodného výběru

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{X}} = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var} X_i = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\mathrm{S.E.}(\bar{X})\right)^2}$$

- $\mathrm{S.E.}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – **střední chyba průměru**

  [standard error of mean]
- variabilita průměrů (měřená rozptylem) z výběrů rozsahu n je n-krát menší, než variabilita jednotlivých pozorování σ^2
- střední chyba průměru je $\sqrt{n}$-krát menší než σ
- čím jsou rozsahy výběru větší, tím méně výběrové průměry kolísají (kolem populačního průměru)
- speciálně pro normální rozdělení $X_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ nezávislé:

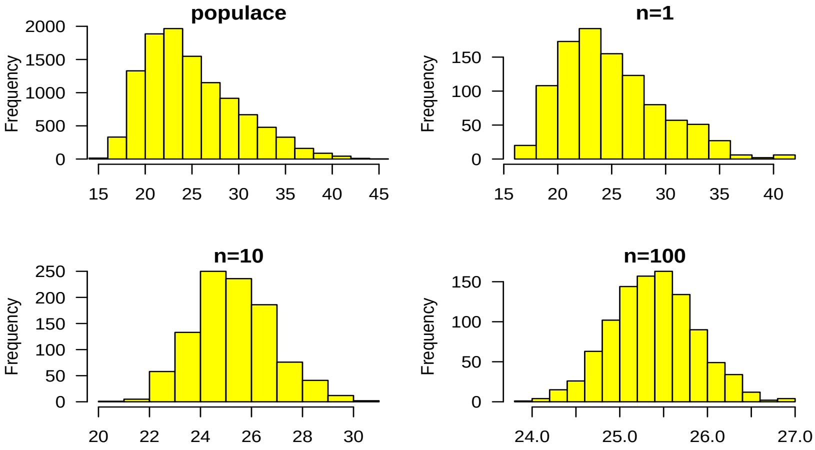
$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

(všimněte si závislosti na n)

příklad: věk matek (nestejná měřítka!)

populace - 10 916 matek, opakované výběry rozsahu $n = 1, 10, 100$

je patrno, že s rostoucím n se histogram blíží histogramu norm. rozdělení



příklad: věk matek

průměrný věk matek v opakovaných výběrech,
počet opakování $B = 1000$

rozsah výběru n	průměr průměrů	směr. odch. průměrů	šikmost průměrů	špičatost průměrů
1	25,42	4,625	0,740	0,287
10	25,35	1,544	0,275	-0,038
100	25,39	0,480	0,081	-0,053
1000	25,40	0,150	0,003	0,037
populace	$\mu =$25,40	$\sigma =$4,942	$\gamma_1 =$0,773	$\gamma_2 =$0,192

centrální limitní věta (CLV, CLT)

[Central Limit Theorem]

- Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 > 0$ (nemusí pocházet z normálního rozdělení).
  Potom **pro velké** n má průměr $\bar{X}$ přibližně rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, součet $X_1 + \ldots + X_n$ pak rozdělení $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.
- prakticky: **průměr** má pro dost velká n **normální rozdělení** s rozptylem n-krát menším než jednotlivá pozorování, a to bez ohledu na výchozí rozdělení jednotlivých pozorování
- CLT je často důvodem předpokladu o normálním rozdělení, výsledná hodnota je ovlivněna součtem velikého počtu nahodilých malých vlivů
- příklad: průměrný věk matek z velkých výběrů má už (téměř) normální rozdělení
- důsledek: pro velké n lze binomické rozdělení $\mathrm{bi}(n, \pi)$ aproximovat normálním rozdělením $\mathrm{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$

interval spolehlivosti pro μ (pro populační průměr)

výběr z $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ nebo velké n [confidence interval]

- víme, že $\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$, tedy $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$\mathrm{P}(|Z| < 1{,}96) = \mathrm{P}\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n} < 1{,}96\right) = 0{,}95$$

- což je totéž, jako (μ se od $\bar{X}$ liší nejvýše ...)

$$\mathrm{P}\left(|\bar{X}-\mu| < 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

- tedy (všimněte si zkracování intervalu s rostoucím n)

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

- dostali jsme 95% **interval spolehlivosti pro parametr** μ

interpretace intervalu spolehlivosti

- je to **intervalový** odhad populačního průměru (stř. hodnoty) μ
- $\bar{X}$ je **bodový** odhad μ
- **základní vlastnost**: 95% interval spolehlivosti **překryje** s pravděpodobností 95 % **neznámé** μ (**odhadovaný parametr**)
- kdybychom postup prováděli opakovaně, pak asi v 95 % případů interval překryje skutečnou hodnotu μ, ve zbylých asi 5 % zůstane skutečné μ mimo interval spolehlivosti
- pro obecné α (spolehlivost $1-\alpha$):

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(1-\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(1-\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

- POZOR na nesprávné interpretace, vypovídá o neznámé **konstantě** μ, nikoliv o **náhodných veličinách** X nebo $\bar{X}$

příklad: výšky desetiletých chlapců

- $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(1-\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z(1-\alpha/2)\right)$
- náhodně vybráno $n = 15$ desetiletých chlapců,
- je známo (předpokládá se), že je $\sigma = 6{,}4$ cm
- průměrná výška **ve výběru** 139,13 cm
- $\alpha = 5$ %, tedy $z(1-\alpha/2) = z(0{,}975) = 1{,}96$
- 95% interval spolehlivosti pro **průměrnou výšku všech desetiletých chlapců** (**populační průměr**):

$$\left(139{,}13 - \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}96\,;\, 139{,}13 + \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}96\right)$$

$$(135{,}9; 142{,}3)$$

- **(populační) průměr výšek všech** desetiletých chlapců leží s pstí 95 % v rozmezí od 135,9 cm do 142,3 cm

interval spolehlivosti při neznámém σ

- když neznáme směr. odchylku σ, je třeba použít kritické hodnoty Studentova t-rozdělení (pozor na jiné označení u Studentova t-rozdělení v Biostatistice)

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2) < \mu < \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

- jako odhad σ se použije **výběrová** směrodatná odchylka

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

- při velkých n ($n \geq 50$) stačí použít $z(1-\alpha/2)$ místo $t_{n-1}(1-\alpha/2)$
- interval spolehlivosti se počítá i při odhadu jiných parametrů
- je to interval, který s požadovanou pravděpodobností překryje odhadovaný parametr – **intervalový odhad**

příklad: věk matek (soubor Kojeni)

normální rozdělení průměrů dáno CLT a velkým n, $t_{98}(0{,}95) = 1{,}98$

- 95% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

$$\left(25{,}7 - \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 1{,}98; 25{,}7 + \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 1{,}98\right) = (24{,}9; 26{,}5)$$

[confint(lm(vek.m∼1,data=Kojeni))], [t.test(Kojeni$vek.m)]

- 99% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek (bude užší nebo širší?)
- požadovanou větší jistotu zajistí delší interval spolehlivosti (delší – méně vypovídající)

$$\left(25{,}7 - \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 2{,}63; 25{,}7 + \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 2{,}63\right) = (24{,}6; 26{,}8)$$

[confint(lm(vek.m∼1,data=Kojeni),level=0.99)]

příklad: věk matek

normální rozdělení průměrů dáno CLT a velkým n, $t_{98}(0{,}90) = 1{,}66$

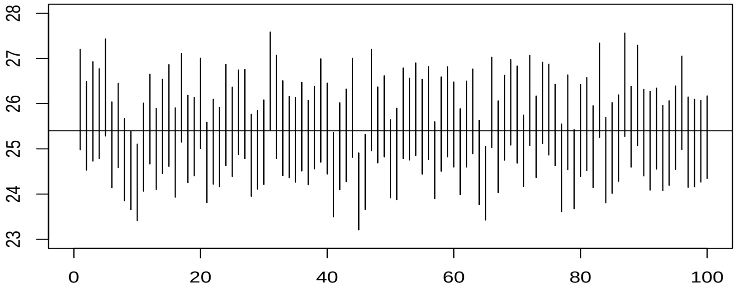
- 90% interval spolehlivosti pro populační průměr věku *všech* matek na základě výběru 99 matek

  $$\left(25{,}7 - \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 1{,}66; 25{,}7 + \frac{4{,}1}{\sqrt{99}} \cdot 1{,}66\right) = (25{,}0; 26{,}4)$$

  [confint(lm(vek.m~1,data=Kojeni),level=0.9)] *všech* matek na základě výběru 99 matek je pochopitelně užší, než interval 95%

- příklady *nesprávné interpretace* 90% intervalu spolehlivosti:
  - *90 % žen má věk v intervalu (25,0; 26,4)*
    např. mezi našimi 99 matkami je jen 12 žen ve věku 25 a 10 ve věku 26 roků, navíc, s rostoucím n se interval zužuje
  - *výběrový průměr věku matek je s pravděpodobností 90 % v intervalu (25,0; 26,4)*
    výběrový průměr je uprostřed (tedy uvnitř) intervalu **vždy**

simulované výběry pro $n = 100$ (věk matek)



znázorněno celkem 100 95% intervalů spolehlivosti pro μ
ve skutečnosti mimořádně víme, že $\mu = 25{,}4$
v 7 případech je μ nepřekryto
(7 je realizace náhodné veličiny s rozdělením $\mathrm{bi}(100, 0{,}05)$)

centrální limitní věta pro četnosti

- (CLT obecně:) Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 > 0$. Potom pro velké n má průměr z nich přibl. rozdělení $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, jejich součet přibl. rozdělení $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.
- $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi)$: Y je absolutní četnost výskytu jevu s pravděpodobností výskytu π v n nezávislých pokusech
- $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je součet nezávislých náhodných veličin X_i s alternativním rozdělením, $X_i \sim \mathrm{alt}(\pi), \mathrm{var}\, X_i = \pi(1-\pi)$
- podle CLT proto přibližně $Y \dot{\sim} \mathrm{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$
- relativní četnost $Y/n = \bar{X}$ je průměr veličin s alternativním rozdělením, označme $\hat{\pi} = Y/n$
- podle CLT je přibližně $\hat{\pi} \dot{\sim} \mathrm{N}(\pi, \pi(1-\pi)/n)$
- $\hat{\pi}$ je **nestranný** odhad π

interval spolehlivosti pro pravděpodobnost π

- odmocnina z rozptylu odhadu $\hat{\pi}$ je $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- střední chyba relativní četnosti = směrodatná odchylka relativní četnosti
- pravděpodobnost π neznáme, odhadneme ji pomocí relativní četnosti $\hat{\pi} = Y/n$
- odtud je $100(1-\alpha)\%$ přibližný interval spolehlivosti pro π

$$\left(\hat{\pi} - \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \cdot z(1-\alpha/2); \hat{\pi} + \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \cdot z(1-\alpha/2)\right)$$

[prop.test(y,n,correct=FALSE)]

- existují přesnější (pracnější) postupy
  [binom.test(y,n)]

příklad: hody s hrací kostkou

- odhadujeme pravděpodobnost šestky, $\alpha = 0{,}05$
- kostka A: $n = 100, y = 17, \hat{\pi}_A = 0{,}17$

$$\left(0{,}17 - \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}} \cdot 1{,}96; 0{,}17 + \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}} \cdot 1{,}96\right) = (0{,}10; 0{,}24)$$

- kostka B: $n = 100, y = 41, \hat{\pi}_B = 0{,}41$

$$\left(0{,}41 - \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}} \cdot 1{,}96; 0{,}41 + \sqrt{\frac{0{,}41 \cdot 0{,}59}{100}} \cdot 1{,}96\right) = (0{,}31; 0{,}51)$$

- důležitý rozdíl: u kostky A patří $1/6 = 0{,}167$ do 95% intervalu spolehlivosti; u kostky B nikoliv

populace a výběr

[population, (random) sample, representative, parameter, statistics, estimator]

- **populace (základní soubor)**: soubor jednotek, o jejichž hromadných vlastnostech chceme vypovídat (všechny možné výsledky pokusu, všichni hoši zvoleného věku, všichni čolci v rybníčku) $\Rightarrow$ rozdělení náhodné veličiny
- **výběr**: náhodně vybraná vyšetřovaná část populace (vzorek)
- **reprezentativní výběr** obráží poměry v populaci (nutná vlastnost výběru, aby mohl vypovídat o populaci)
- **náhodný výběr**: nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením (model pro měření na výběru)
- **parametr**: (neznámé) číslo popisující nějakou **vlastnost populace**, charakteristika rozdělení náhodné veličiny
- **statistika**: funkce náhodného výběru (pozorování)
- **odhad**: statistika použitá k odhadu parametru

Jsou desetiletí hoši stejně vysocí jako desetileté dívky?

- Jak porovnat různě vysoké chlapce s různě vysokými dívkami?
- potřebujeme nějaké číslo charakterizující výšky **všech** chlapců a podobné číslo pro dívky: **populační průměry**
- budeme rozhodovat o porovnání **populačního** průměru výšek chlapců s **populačním** průměrem výšek dívek
- $X_1, \ldots, X_n$ jsou výšky **náhodně vybraných** chlapců; předem je neznáme $\Rightarrow$ v úvahách jsou to **náhodné veličiny**
- hodnoty $X_1, \ldots, X_n$ kolísají kolem střední hodnoty $\mathrm{E}\, X_i = \mu_X$ (populační průměr)
- velikost kolísání popisuje **populační** rozptyl σ^2
- (bodovým) odhadem populačního průměru bude výběrový průměr $\bar{X}$ spočítaný z n skutečně zjištěných výšek
- Jaké vlastnosti má průměr $\bar{X}$?

příklad: výška desetiletých chlapců

- v roce 1951 bylo provedeno rozsáhlé měření výšky desetiletých hochů, výška byla vyšetřena v populaci desetiletých chlapců: zjištěno $\mu = 136{,}1$ cm, $\sigma = 6{,}4$ cm
- na základě výběru pořízeného v roce 1961 máme rozhodnout, zda se po deseti letech výška populace desetiletých **zvýšila**
- hodnoty zjištěné v roce 1961 [cm]: 130, 140, 136, 141, 139, 133, 149, 151, 139, 136, 138, 142, 127, 139, 147
- $\bar{x} = 139{,}13$ cm, $s^2 = 6{,}56^2$ cm^2
- jiný (další) výběr z roku 1961 by obsahoval jiných 15 hochů, tedy by vedl k jinému výběrovému průměru (náhodná veličina)
- stačí rozdíl $139{,}13 - 136{,}1 = 3{,}03$ (realizace náhodné veličiny, proč?), abychom prokázali, že se **populační průměr** výšek desetiletých chlapců po deseti letech změnil?

testování statistických hypotéz

[hypothesis testing, null hypothesis, alternative hypothesis, critical (rejection) region, Type I (II) error, significance level]

- **nulová hypotéza** H_0: tvrzení o populaci (parametru), o jehož platnosti rozhodujeme (**ne**ní rozdíl, **ne**závisí, **ne**liší se od ...)
- **alternativní hypotéza** H_1: (alternativa) zbývající možnost (k H_0), často „vědecká hypotéza“, kterou chceme dokázat
- hypotézy $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1$ jsou dány úlohou, nikoliv naší volbou
- **kritický obor**: možné výsledky pokusu, kdy H_0 zamítáme; zpravidla popsán pomocí statistiky (např. $|Z| \geq z(1-\alpha/2)$)
- **obor přijetí**: možné výsledky pokusu, kdy H_0 nezamítáme
- **chyba prvního druhu**: (náhodný jev) rozhodnutí zamítnout H_0, když platí H_0, tj. falešně prokázat „vědeckou hypotézu“
- **chyba druhého druhu**: (náhodný jev) rozhodnutí nezamítnout H_0, když platí H_1, tj. nepoznat neplatnost H_0

statistické rozhodování

[significance level, power, p-value]

- **hladina testu** α (zpravidla $\alpha = 5$ %)
    - maximální dovolená pravděpodobnost chyby prvního druhu
    - volí se před pokusem, nezávisle na jeho výsledku
    - **pevná** (nenáhodná) hodnota
- **síla testu** $1 - \beta$
    - pravděpodobnost zamítnutí neplatné H_0
    - pst, s jakou prokážeme platnou „vědeckou hypotézu"
    - závisí na skutečné hodnotě parametru
- *p*-**hodnota**
    - za platnosti H_0 určená pst, že dostaneme statistiku, která stejně nebo ještě méně podporuje H_0
    - nejmenší hladina α, na které lze ještě H_0 zamítnout
    - „stupeň důvěry" v platnost nulové hypotézy
    - je to **náhodná veličina**, nikoliv pravděpodobnost H_0
- H_0 se **zamítá**, právě když $\boxed{p \le \alpha}$ (**zapamatovat**)

testování statistických hypotéz

rozhodnutí	skutečnost: H_0 platí	skutečnost: H_0 neplatí
H_0 zamítnout (reject)	**chyba 1. druhu** (pst $\leq \alpha$)	správné rozhodnutí (pst $= 1 - \beta$)
H_0 nezamítnout (accept, přijmout)	správné rozhodnutí (pst $\geq 1 - \alpha$)	chyba 2. druhu (pst $= \beta$)

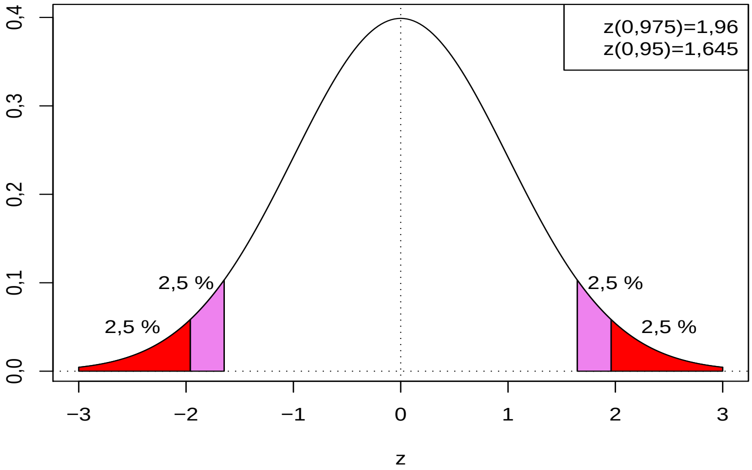
- zamítnutí $\Leftrightarrow$ výsledek pokusu v kritickém oboru
- přijetí $\Leftrightarrow$ výsledek pokusu v oboru přijetí
- nikdy spolehlivě nevíme, zda H_0 platí
- chybu 1. druhu nechceme dělat často $\Rightarrow$ α volíme malé

rozhodování o populačním průměru normálního rozdělení (σ známé)

- $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ **nezávislé**; $\sigma > 0$ známe
- $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$, tedy $\mathrm{S.E.}(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$
- $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ (dané číslo, jiný zápis $\mathrm{H}_0 : \mu - \mu_0 = 0$)
- platí-li H_0, pak $\boxed{Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)}$
- $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ kritický obor: $|Z|$ velké, tj. $\boxed{|Z| \geq z(1 - \alpha/2)}$
- $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$: zamítnout pro $\boxed{Z \geq z(1 - \alpha)}$
- $\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$: zamítnout pro $\boxed{Z \leq z(\alpha) = -z(1 - \alpha)}$
- volba jednostranné alternativy jen podle zadání úlohy, nikoliv podle výsledku pokusu (nezávisle na datech)

kritický obor pro $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$

červeně na 5% hladině, červeně a fialově na 10% hladině, hustota Z za H_0



příklad: výška desetiletých chlapců

pozor, **jednostranná** alternativa!

- zvolíme klasickou hladinu $\alpha = 5$ %
- v roce 1951 $\mu = \mu_0 = 136{,}1$ cm, $\sigma = 6{,}4$ cm
- v roce 1961 změřeno $n = 15$ náhodně vybraných desetiletých hochů, $\bar{x} = 139{,}13$ cm
- stačí tento vzrůst k důkazu, že nová generace je vyšší?
- vzrostla výška desetiletých ? $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$

$$z = \frac{139{,}13 - 136{,}1}{6{,}4}\sqrt{15} = 1{,}836$$

- $z(0{,}05) = 1{,}645 < 1{,}836$, tedy H_0 na 5% hladině **zamítáme**
- statisticky **významný** výsledek
- na 5% hladině jsme prokázali, že nová generace je vyšší
- v případě, že nová generace není vyšší, riskovali jsme jen 5% pravděpodobnost, že budeme nesprávně tvrdit, že vyšší je

příklad: výška desetiletých chlapců

kritický obor (nezapomeň na jednostrannou alternativu!)

- kritický obor pomocí Z:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq z(1-\alpha)$$

- totéž pro $\bar{X}$:

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z(1-\alpha)$$

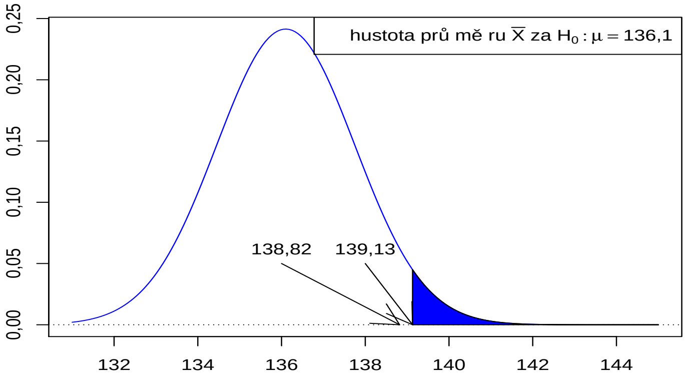
- konkrétně pro výšku hochů:

$$\bar{X} \geq 136{,}1 + \frac{6{,}4}{\sqrt{15}} \cdot 1{,}645 = 138{,}82$$

výška desetiletých hochů

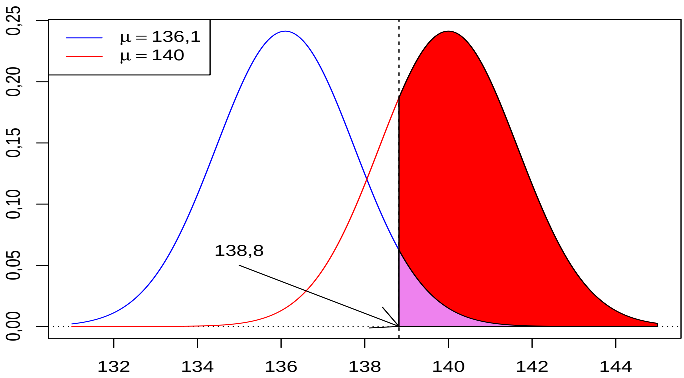
hustota $\bar{X}$ za platnosti hypotézy $H_0 : \mu = 136{,}1$, $H_1 : \mu > \mu_0$ při $\sigma = 6{,}4$

- p-hodnota je pst, že za H_0: $Z = (\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma > 1{,}836$ tj. $\bar{X} > 136{,}1 + 1{,}836 \cdot 6{,}4/\sqrt{15} = 139{,}13$ [1-pnorm(1.836)]
- p-hodnota: modrá plocha napravo od 139,13, $p = 3{,}3$ %



výška desetiletých chlapců – síla testu

hustota $\bar{X}$ za hypotézy (modře) a při $\mu = 140$ (červeně)
hladina testu = fialová plocha, síla testu = fialová + červená plocha



hraniční hodnota $\bar{X}$, při které se „láme“ rozhodování (hranice kritického oboru a oboru přijetí): $136{,}1 + 6{,}4/\sqrt{15} \cdot 1{,}645 = 138{,}8$

volba rozsahu výběru

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

- pro zvolenou hodnotu $\mu_1 \neq \mu_0$ požadujeme sílu $1 - \beta$
- $1 - \beta$ je pravděpodobnost, s jakou odhalíme neplatnost H_0, je-li ve skutečnosti $\mu = \mu_1$

$$n \geq \left(\frac{z(1 - \alpha/2) + z(1 - \beta)}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \sigma^2$$

- při jednostranné alternativě by bylo $z(1 - \alpha)$ místo $z(1 - \alpha/2)$
- aby při jednostranné alternativě pro $\mu_1 = 140$ byla síla 90 % (tj. $1 - \beta = 0{,}9$, $\beta = 0{,}1$, $z(0{,}9) = 1{,}282$), bude třeba aspoň

$$n \geq \left(\frac{1{,}645 + 1{,}282}{140 - 136{,}1} \right)^2 6{,}4^2 = 23{,}1$$

(místo 15 pozorování jich potřebujeme aspoň 24, při oboustranné alternativě aspoň 29)

jednovýběrový t-test

výběr z $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, σ **neznámé**

- n nezávislých pozorování $X_1, \ldots, X_n$ z rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
- $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ (populační průměr roven dané konstantě)
- nutno odhadnout neznámý rozptyl σ^2

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- statistika (místo σ použijeme S_x)

$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{S.E.}(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_x} \sqrt{n}}$$

- $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$ zamítat při $|T| \geq t_{n-1}(1 - \alpha/2)$
- $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$ zamítat při $T \geq t_{n-1}(1 - \alpha)$
- $\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$ zamítat při $T \leq t_{n-1}(\alpha) = -t_{n-1}(1 - \alpha)$

výšky hochů pro případ neznámého σ

- $\mathrm{H}_0 : \mu = 136{,}1$ proti $\mathrm{H}_1 : \mu > 136{,}1$ $(\alpha = 5\ \%)$

$$\bar{x} = 139{,}133 \qquad s_x^2 = 6{,}556^2$$

$$t = \frac{139{,}133 - 136{,}1}{6{,}556}\sqrt{15} = 1{,}792 > 1{,}761 = t_{14}(0{,}95)$$

$$p = \mathrm{P}(T \geq 1{,}792) = 0{,}047 \qquad (\text{ tj. } 4{,}7\ \%)$$

- na 5% hladině jsme prokázali zvýšení populačního průměru (H_0 se na 5% hladině **zamítá**)
- [t.test(hosi,mu=136.1,alternative="greater")]

výšky hochů pro případ neznámého σ

(jiné zadání úlohy)

- **kdybychom** předem neměli určenu jednostrannou alternativu, museli bychom zvolit $H_1 : \mu \neq 136{,}1$, pak

$$|t| = |1{,}792| < 2{,}145 = t_{14}(0{,}975)$$
$$p = P(|T| \geq 1{,}792) = 0{,}0948 \qquad \text{(tj. 9,48 \%)}$$

- hypotézu na 5% hladině nezamítáme, výsledek **není statisticky významný**
- neznamená to, že bychom H_0 prokázali, pouze můžeme **předpokládat**, že H_0 platí
- [t.test(hosi,mu=136.1,alternative="two.sided")], stačí ale [t.test(hosi,mu=136.1)]

výšky hochů pro případ neznámého σ

- 95% interval spolehlivosti: $(135{,}5; 142{,}8)$
  s 95% pravděpodobností je skutečný populační průměr (střední hodnota označená μ) v uvedeném intervalu
- je jen 5% riziko, že leží mimo uvedený interval
- 99% interval spolehlivosti $(134{,}1; 144{,}2)$
  [t.test(hosi,mu=136.1,conf.level=0.99)] (vedlejší výsledek)
  [confint(lm(hosi~1),level=0.99)]
- aby byla zajištěna větší spolehlivost intervalu (větší pravděpodobnost, že zachytí skutečnou hodnotu), je nutně 99% interval spolehlivosti delší, než 95% interval spolehlivosti

souvislost s intervalem spolehlivosti pro μ

při oboustranné alternativě

- oboustranný interval spolehlivosti pro μ (viz str. 112)

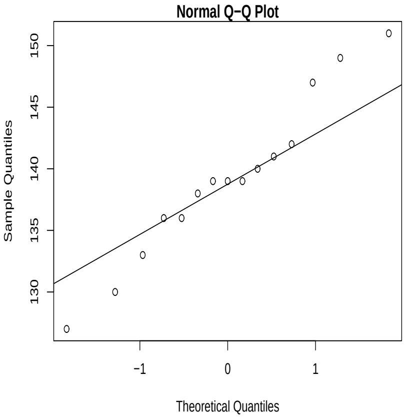
$$\left(\bar{X} - \frac{S_x}{\sqrt{n}}\, t_{n-1}(1-\alpha/2), \bar{X} + \frac{S_x}{\sqrt{n}}\, t_{n-1}(1-\alpha/2)\right)$$

- μ_0 patří do intervalu spolehlivosti, právě když platí

$$|\bar{X} - \mu_0| < \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha/2)$$

- tedy, právě když se nezamítne hypotéza $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ při oboustranné alternativě $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$
- interval spolehlivosti obsahuje takové hodnoty μ_0, pro které bychom **nezamítli** hypotézu $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$
- podobně u jednostranných intervalů spolehlivosti a jednostranných alternativ

ověření předpokladu o normálním rozdělení



- **Shapirův-Wilkův test**
- H_0 : normální rozdělení s nějakými (neznámými) parametry
- [shapiro.test(hosi)]
- $W = 0{,}966$, $p = 80$ %
- test hodnotí kvalitu přiblížení bodů k přímce na diagramu normality
- [qqnorm(hosi);qqline(hosi)]

pravděpodobnost výskytu jevu

test hypotézy o parametru π binomického rozdělení

- $Y \sim \mathrm{bi}(n, \pi) \quad \mathrm{H}_0 : \pi = \pi_0$:
$$Z = \frac{Y - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\mathrm{S.E.}(\hat{\pi})} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_o)/n}} \dot{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$
- podobnost s intervalem spolehlivosti pro π na str. 116
- někdy s opravou na spojitost (Yates)

$$Z = \frac{|Y - n\pi_0| - 0{,}5}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}} \,\mathrm{sign}(Y - n\pi_0) \dot{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

- $\mathrm{H}_1 : \pi \neq \pi_0$: zamítnout pokud $|Z| \geq z(1-\alpha/2)$
- $\mathrm{H}_1 : \pi > \pi_0$: zamítnout pokud $Z \geq z(1-\alpha)$
- $\mathrm{H}_1 : \pi < \pi_0$: zamítnout pokud $Z \leq z(\alpha) = -z(1-\alpha)$
- existuje přesný postup, bez použití aproximace

příklad kalous

- pokusit se prokázat, že kalous dá přednost infikované myši před myší neinfikovanou
- Y – počet „zdarů“, $n = 50$, π – pst, že zvolí infikovanou
- Y má **binomické rozdělení**
  za $\mathrm{H}_0 : \pi = 1/2$ ($= \pi_0$, myši se neliší) je $Y \sim \mathrm{bi}(50, 1/2)$
- **alternativní hypotéza**: $\mathrm{H}_1 : \pi > 1/2$
- v pokusu z 50 případů dal kalous ve 33 případech přednost infikované myši před neinfikovanou
- **kritický obor**: velká hodnota Y (tj. velké $\hat{\pi}$ resp. velké Z)

$$z = \frac{33 - 50 \cdot 0{,}5}{\sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2{,}263 \qquad p = \mathrm{P}(Z \geq 2{,}263) = 0{,}0118$$

- s opravou na spojitost jsme opatrnější:

$$z = \frac{33 - 50 \cdot 0{,}5 - 0{,}5}{\sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2{,}121 \qquad p = \mathrm{P}(Z \geq 2{,}121) = 0{,}0169$$

příklad kalous

- prop.test() počítá Z^2, která má za H_0 : rozdělení χ^2_1
  [prop.test(33,n=50,p=0.5,alternative="greater",correct=FALSE)]
  [prop.test(33,50,alternative="greater")]
  [binom.test(33,50,alternative="greater")]
- p-**hodnota (dosažená hladina)**: za H_0 počítaná pst, že dostaneme výsledek aspoň tolik odporující nulové hypotéze, jako ve skutečném pokusu:

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}(Y \geq 33) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 32) \\ &= \sum_{k=33}^{50} \binom{50}{k} 0{,}5^k (1-0{,}5)^{50-k} \\ &= 0{,}0164 \end{aligned}$$

[1-pbinom(32,50,1/2)] [sum(dbinom(33:50,50,0.5))]

párové testy

(převedou úlohu na jednovýběrové testy)

- $(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$ – párová pozorování
  nezávislé dvojice (možná) závislých náhodných veličin
- U_i, V_i – dvojice měření na stejných jedincích, např. hodnota zjištěná před ošetřením a po něm
- např. výška otce a jeho syna nebo věk otce a věk matky
- **nezajímá nás** zda je mezi nimi **závislost**, tu připouštíme, těsná závislost uvnitř dvojic je dokonce výhodná
- **zajímá nás zda** jsou **co do polohy stejné**,
  nebo např. synové v (populačním) průměru vyšší, než otcové
- $X_i = U_i - V_i$ (označení rozdílů)
- předp. **stejné rozdělení** $X_1, \ldots, X_n$ (např. normální)
- H_0 tvrdí, že např. mezi výškami otců a synů **není rozdíl**, tedy že rozdíly X_i **kolísají kolem nuly**: populační míra polohy rozdílů je nulová (např. střední hodnota tj. populační průměr)

párový t-test

předpoklad: normální rozdělení rozdílů

- předpoklad: $X_i = U_i - V_i$ mají **normální** rozdělení, **nezávislé**
- $X_i = U_i - V_i \sim \mathrm{N}\left(\mu_U - \mu_V, \sigma^2\right) = \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$
- vlastně **jednovýběrový** t-**test** pro $X_i = U_i - V_i$
- $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ (zpravidla $\mu_0 = 0$, pak je $\mu_U = \mu_V$)
- odhad σ^2: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\mathrm{S.E.}\left(\bar{X}\right)} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} = \dfrac{\bar{U} - \bar{V} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 0$, když $|T| \geq t_{n-1}(1 - \alpha/2)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu < 0$, když $T \leq t_{n-1}(\alpha) = -t_{n-1}(1 - \alpha)$
- ve prospěch $\mathrm{H}_1 : \mu > 0$, když $T \geq t_{n-1}(1 - \alpha)$

příklad: výšky rodičů (párová pozorování!)

H$_0$: otcové jsou o 10 cm vyšší než matky, H$_1$ oboustranná

- U – výška otce, V – výška matky, $X = U - V$
- $\alpha = 0{,}05, \mathrm{H}_0 : \mu_U = \mu_V + 10$ resp. $\mu_U - \mu_V = 10$
- $n = 99, \bar{u} = 179{,}267, \bar{v} = 166{,}970$
- $\bar{x} = \bar{u} - \bar{v} = 12{,}293, s_X = s_{U-V} = 8{,}144$
- $t = \frac{12{,}293-10}{8{,}144}\sqrt{99} = 2{,}801$, tedy
  $|t| > t_{98}(0{,}975) = 1{,}9845 \quad \Rightarrow$ zamítnout H$_0$
- $p = \mathrm{P}(|T| \geq |t|) = 0{,}0061 \qquad (0{,}61\ \%)$
- 95% interval spolehlivosti pro $\mu_U - \mu_V$:

$$\left(12{,}293 - \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\ ;\ 12{,}293 + \frac{8{,}144}{\sqrt{99}}1{,}9845\right) = (10{,}67; 13{,}92)$$

[shapiro.test(vyska.o-vyska.m)] ověření normality
[t.test(vyska.o,vyska.m, mu=10, paired=TRUE)]
[t.test(vyska.o-vyska.m, mu=10)]

znaménkový test

bez předpokladu normálního rozdělení, stačí libovolné **spojité** rozdělení

- stačí znát znaménka rozdílů $X_i = U_i - V_i$
- pozorování s $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$) se vynechají, upraví se n
- Y – počet **kladných** znamének $X_i = U_i - V_i$
- H_0 : rozdělení U a V jsou stejná, pak je nutně $\mathrm{P}(U_i > V_i) = \mathrm{P}(X_i > 0) = 1/2$, tedy $Y \sim \mathrm{bi}(n, 1/2)$
- H_0 zamítáme pro velká nebo malá Y:

$$Z = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(1 - \alpha/2)$$

- pro malá n je bezpečnější použít Yatesovu korekci

$$Z = \frac{|Y - n/2| - 0{,}5}{\sqrt{n/4}}, \qquad |Z| \geq z(1 - \alpha/2)$$

příklad: věk rodičů (párová pozorování!)

normalitu rozdílu věku rodičů sotva lze předpokládat

- celkem 99 dvojic (otec, matka), sledujeme jejich věk (U, V)
- $\mathrm{H}_0 : \mu_U = \mu_V + 2$ (populační míra polohy věku otců je o 2 roky větší, než matek), H_1 oboustranná
- v jedenácti případech je vek.o – vek.m $= 2$, tyto dvojice nepoužijeme, proto $n = 99 - 11 = 88$
- u 50 dvojic je vek.o – vek.m > 2, proto

$$z = \frac{50 - 88/2}{\sqrt{88/4}} = 1{,}279, \qquad p = 0{,}201\ (20{,}1\ \%)$$

- s Yatesovou korekcí: $z = 1{,}172$, $p = 0{,}241$ $(24{,}1\ \%)$

```
[n = sum(vek.o-vek.m != 2)]
[y = sum(vek.o-vek.m > 2)]
[prop.test(y,n,correct=FALSE)]
[prop.test(y,n,correct=TRUE)]
```

počet nenulových X_i
počet kladných X_i
bez Yatesovy korekce
s Yatesovou korekcí

párový Wilcoxonův test [Wilcoxon signed rank test]

(silnější předpoklad, než u znaménkového testu)

- nutné je **spojité a symetrické** rozdělení $X_i = U_i - V_i$
- H_0 : populační medián X_i je roven 0 (tj. $P(X_i > 0) = 0{,}5$)
- opět vyloučíme případy $U_i = V_i$ (tj. $X_i = 0$)
- určíme pořadí R_i^+ absolutních hodnot $|X_i| = |U_i - V_i|$
- W součet těch pořadí, kde bylo $U_i > V_i$ (tj. $X_i > 0$)

$$Z = \frac{W - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

- pod odmocninou bývá ještě oprava na výskyt shodných hodnot, která jmenovatele poněkud zmenší [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,mu=10,paired=TRUE)]
- pro malá n se čitatel zpravidla přibližuje o $1/2$ k nule: (všimněte si zkrácených názvů parametrů – jednoznačnost!) [wilcox.test(vyska.o,vyska.m,m=10,p=TRUE,cor=FALSE)]

příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

- u **devíti** osob provedeno porovnávání dvou způsobů předávání informace (např. poslouchání vers. čtení)
- rozhodnout, zda je mezi oběma způsoby rozdíl
- H_0: rozdělení U a V stejná, tedy populační medián rozdílů $X = U - V$ je roven 0
- znaménkový test s Yatesovou korekcí (málo pozorování):

$$y = 5 \qquad n = 8$$

$$z = \frac{|5 - 8/2| - 0{,}5}{\sqrt{8/4}} = 0{,}3536 \qquad p = 72{,}4\ \%$$

u_i	90	86	72	65	44	52	46	38	43
v_i	85	87	70	62	44	53	42	35	46
x_i	5	-1	2	3	0	-1	4	3	-3
r_i^+	8	1,5	3	5	–	1,5	7	5	5

příklad: porovnání dvou metod učení nazpaměť

párový Wilcoxonův test [Wilcoxon signed-rank test]

- H_0 : populační medián rozdílů $= 0$
- nově předpokládáme symetrii
- Wilcoxonův test:

$u_i - v_i$	5	-1	2	3	-1	4	3	-3
r_i^+	*8*	1,5	*3*	*5*	1,5	*7*	*5*	5

$$n = 8$$

$$w = 8 + 3 + 5 + 7 + 5 = 28$$

$$z = \frac{28 - 8 \cdot 9/4 - 1/2}{\sqrt{8 \cdot 9 \cdot 17/24}} = \frac{9{,}5}{\sqrt{51}} = 1{,}33$$

$$p = 18{,}3\ \%$$

- program R dá $p = 18{,}1\ \%$, protože kromě opravy na spojitost bere ohled na shody (přesný výpočet by dal $p = 19{,}5\ \%$)

porovnání populačních měr polohy

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxonův, znaménkový
výběr dvojic	párový t-test	párový Wilcoxonův, znaménkový
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
k nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis
výběr r-tic	analýza rozptylu náhodné bloky	Friedman

dvouvýběrový t-test

(předpoklad **normálního rozdělení**, testuje se **shoda středních hodnot** $\mu_X = \mu_Y$)

- n_X nezávislých pozorování X, n_Y nezávislých pozorování Y
- tyto výběry musí být **nezávislé**
  (musí to zajistit způsob pořízení dat)
- rozptyly σ_X^2, σ_Y^2 shodné (lze ověřit, odhady S_X^2, S_Y^2 podobné)
- normální rozdělení v obou výběrech (lze ověřit, pro velká n_X, n_Y nenormalita tolik nevadí)
- společný odhad rozptylu (vážený průměr odhadů z jednotlivých výběrů)

$$S^2 = \frac{n_X - 1}{n_X + n_Y - 2} S_X^2 + \frac{n_Y - 1}{n_X + n_Y - 2} S_Y^2$$

- statistika (pro test hypotézy, že rozdělení X a Y jsou stejná)

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\mathrm{S.E.}(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}$$

dvouvýběrový t-test

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$
  zamítnout ve prospěch alternativy
  - $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ když $|T| \geq t_{n_X+n_Y-2}(1-\alpha/2)$
  - $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ když $T \geq t_{n_X+n_Y-2}(1-\alpha)$
  - $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ když $T \leq t_{n_X+n_Y-2}(\alpha) = -t_{n_X+n_Y-2}(1-\alpha)$

  [t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] nebo [t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]
- zamítáme-li H_0, říkáme, že rozdíl výběrových průměrů **je (statisticky) významný**
- pochyby o shodě rozptylů: Welchův test (modifikace t-testu)
  [t.test(hosi,divky,var.equal=FALSE)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
  [t.test(hosi,divky)] resp. [t.test(vyska~Hoch)] (pro $\sigma_X \neq \sigma_Y$)
- shodu rozptylů lze ověřit např. F-testem ($H_0 : \sigma_X = \sigma_Y$)
  [var.test(hosi,divky)]
- ověření normality nutně pro každý výběr zvlášť!

příklad: výšky desetiletých dětí

	rozsah	průměr	výb. rozptyl
hoši	15	139,13	42,98
dívky	12	140,83	33,79

$$s^2 = \frac{15-1}{15+12-2}42{,}98 + \frac{12-1}{15+12-2}33{,}79 = 38{,}936$$

$$|t| = \frac{|139{,}13 - 140{,}83|}{\sqrt{38{,}936}}\sqrt{\frac{15\cdot 12}{15+12}} = |-0{,}703| < 2{,}06 = t_{25}(0{,}975)$$

[shapiro.test(hosi)] $p = 80$ %

[shapiro.test(divky)] $p = 38$ %

[tapply(vyska,Hoch,shapiro.test)] (spočítá test pro oba výběry)

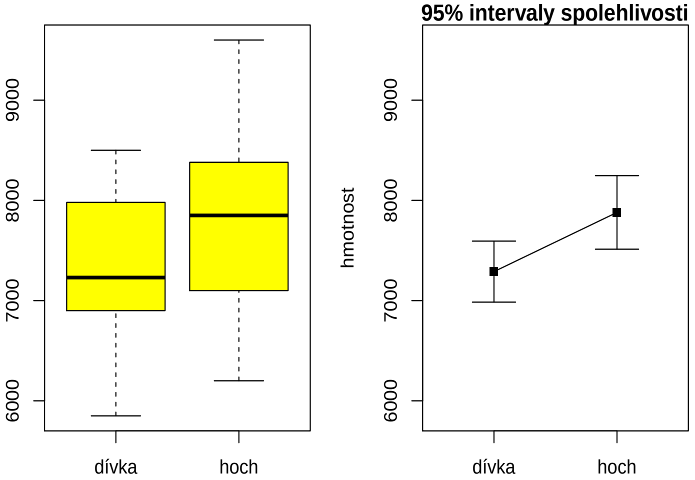
[var.test(hosi,divky)] $p = 70$ %

[t.test(hosi,divky,var.equal=TRUE)] $p = 49$ %

[t.test(vyska~Hoch,data=Vysky,var.equal=TRUE)]

příklad: váha dětí maturantek v 24. týdnu věku dítěte

$t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, rozdíl **je významný**



dvouvýběrový t-test a intervaly spolehlivosti

(poznámka na okraj, platí pro $\alpha = 5$ %)

D: disjunktní int. spol. versus **V: významný rozdíl** (**PP: průměry jsou v CI druhého výběru**)

D $\Rightarrow$ **V** disjunktní intervaly spolehlivosti $\Rightarrow$ významný rozdíl

non **V** $\Rightarrow$ non **D** nevýznamný rozdíl průměrů $\Rightarrow$ překryv intervalů

V $\not\Rightarrow$ **D** rozdíl průměrů může být významný a současně se intervaly mohou překrývat

PP $\Rightarrow$ non **V** pokud každý z intervalů spolehlivosti obsahuje výběrový průměr druhého výběru, rozdíl průměrů není významný (nemusí platit v případě, kdy oba rozsahy výběru jsou do čtyř)

příklad: váha dětí matek maturantek v 24. týdnu

- 95% interval spolehlivosti pro hochy [kg]: (7,51; 8,25)
- 95% interval spolehlivosti pro dívky [kg]: (6,98; 7,59)
- intervaly se poněkud překrývají, přestože t-test dal: $t = 2{,}52$, $p = 1{,}5$ %, tedy významný rozdíl

dvouvýběrový Wilcoxonův test (Mannův-Whitneyův)

(stačí **spojité rozdělení**)

- dva nezávislé výběry rozsahu n_X, n_Y
- spojitá rozdělení
- H_0: rozdělení jsou stejná, tedy i **populační mediány** stejné
- za H_0 jsou výběry „dobře promíchané“
- určíme pořadí v rámci spojených výběrů
- kritický obor: průměrná pořadí se příliš liší
- W_X součet pořadí hodnot X

$$Z = \frac{W_X - n_X(n_X + n_Y + 1)/2}{\sqrt{n_X n_Y (n_X + n_Y + 1)/12}}$$

- shodu zamítni, pokud $|Z| \geq z(1 - \alpha/2)$ (přibližný test)
- citlivý vůči posunutí, méně vůči nestejné variabilitě

příklad: věk matek vers. plánované těhotenství

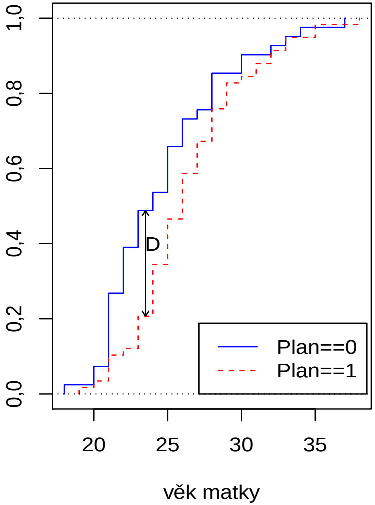
- věk matky nemá normální rozdělení: Shapirův-Wilkův test dal p-hodnoty $p = 0{,}0045$ a $p = 0{,}0470$ [tapply(vek.m,Plan,shapiro.test)]
- rozdělení věku matek je nepochybně spojité
- výběry (0 – neplánované, 1 – plánované těhotenství) jsou nezávislé
- dvouvýběrový Wilcoxonův test H_0 : shodná rozdělení (shodné mediány) dal $p = 0{,}02067$, rozdíl je na 5% hladině **průkazný** [wilcox.test(vek.m∼Plan)]
- $W = 864$ je $\#(vek0 > vek1) + \#(vek0 == vek1)/2$, kde $vek0$ je věk matky s $Plan == 0$, podobně $vek1$

Kolmogorovův-Smirnovův test

(stačí **spojité rozdělení**)

- porovná empirické distribuční funkce dvou **nezávislých** výběrů
- určí jejich největší „svislou" vzdálenost
- citlivý vůči všem neshodám (nejen co do populačního průměru či populačního mediánu)
- porovnání věku matek podle plánovaného těhotenství
- $D = \frac{20}{41} - \frac{12}{58} = 0{,}2808$
  $p = 4{,}5\ \%$

[ks.test(vek.m[Plan==0],vek.m[Plan==1])]

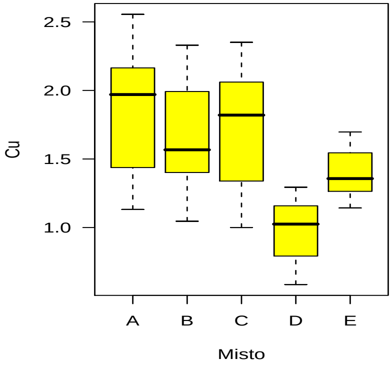


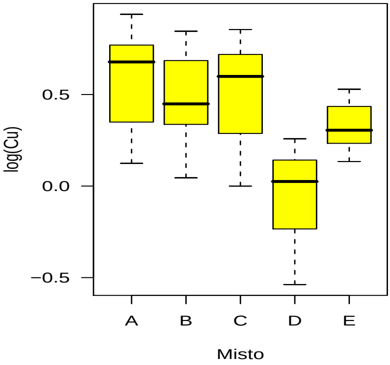
porovnání populačních měr polohy

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxon
výběr dvojic	párový t-test	znaménkový, Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
k nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis
výběr r-tic	analýza rozptylu náhodné bloky	Friedman

motivační příklad pro analýzu rozptylu (játra):

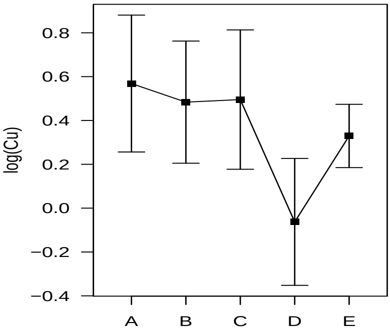
- pět míst na řece, vždy vyloveno po 7 rybách
- zjišťována koncentrace mědi v játrech
- liší se tato místa svým znečištěním?
- logaritmování na pravé straně stabilizuje rozptyl

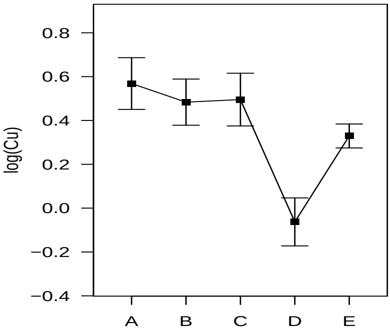




jiné zobrazení dat (error bars)

- v obou grafech jsou znázorněny průměry na jednotlivých místech
- vlevo: úsečky = směrodatné odchylky, vyjadřují **variabilitu dat**
- vpravo úsečky = střední chyba průměru, vyjadřují **přesnost odhadů středních hodnot**





analýza rozptylu jednoduchého třídění (ANOVA)

- $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1} \sim \mathrm{N}\big(\mu_1, \sigma^2\big)$ (první výběr, průměr $\bar{Y}_{1\bullet}$)
  $Y_{21}, \dots, Y_{2n_2} \sim \mathrm{N}\big(\mu_2, \sigma^2\big)$ (druhý výběr, průměr $\bar{Y}_{2\bullet}$)
  ...
  $Y_{k1}, \dots, Y_{kn_k} \sim \mathrm{N}\big(\mu_k, \sigma^2\big)$ (k-tý výběr, průměr $\bar{Y}_{k\bullet}$)
- **nezávislé** výběry (shodné rozptyly, normální rozdělení)
- $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \quad (= \mu)$ $\quad \mathrm{H}_1$: neplatí H_0
- celkový průměr $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$, celkový rozsah $n = \sum_{i=1}^k n_i$
- rozklad součtu čtverců

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$

(celková variabilita) = (variabilita mezi) + (variabilita uvnitř)

$$S_T = S_A + S_e$$

$$f_T = f_A + f_e$$

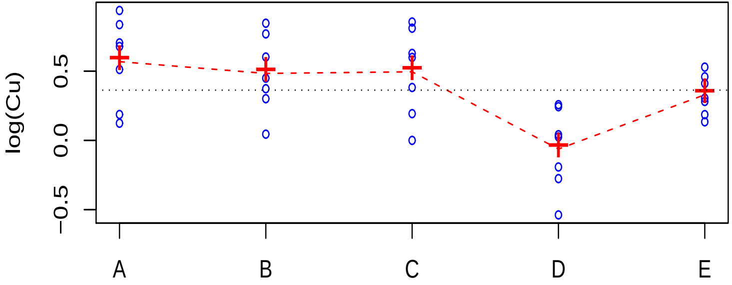
$$(n-1) = (k-1) + (n-k)$$

rozklad součtu čtverců

příklad játra (celkový průměr $\bar{y}_{\bullet\bullet} = 0{,}36$)

(celková variabilita) = (variabilita mezi) + (variabilita uvnitř)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{n_i}(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2$$



tabulka analýzy rozptylu

$$\mathrm{H}_0 \text{ zamítnout, je-li } F_A = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} \geq F_{f_A,f_e}(1-\alpha)$$

variabilita	S	f	S/f	F	p
výběry	S_A	$f_A = k-1$	S_A/f_A	F_A	p_A
reziduální	S_e	$f_e = n-k$	S_e/f_e		
celková	S_T	$f_T = n-1$			

- S – součty čtverců, jejich rozklad
- f – počty stupňů volnosti
- S/f – průměrné čtverce
- F – F-statistika
- p – p-hodnota

příklad játra

variab.	S	f	S/f	F	p
místa	1,796	4	0,4490	5,862	0,0013
rezid.	2,285	30	0,0762		
celk.	4,081	34			

$F = 5{,}862 > F_{4,30}(0{,}95) = 2{,}690$
na 5% hladině jsme **prokázali rozdíl**
[summary(aov(lnCu∼Misto,data=Med))]
nebo také
[anova(lm(lnCu∼Misto,data=Med))]

ověření předpokladů

- **nezávislost**: dáno organizací (plánem) pokusu
  předpoklad nelze vynechat či nahradit
- **shoda rozptylů**: (vyvážený model je málo citlivý na neshodu populačních rozptylů)
  - Leveneův test
    (vlastně jednoduché třídění s $|Y_{it} - \text{med}_t Y_{it}|$)
    $p = 64{,}8\ \%$ [leveneTest(lnCu,Misto)]
  - Bartlettův test
    (citlivý na splnění předpokladu o normálním rozdělení)
    $p = 45{,}3\ \%$ [bartlett.test(lnCu,Misto)]
- **normální rozdělení**: (vyvážený model je málo citlivý na nenormalitu), test normality nutno uplatnit na rezidua
  $Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet}$ (na všech n reziduí najednou) $p = 6{,}8\ \%$
  [shapiro.test(resid(aov(lnCu~Misto)))]
  nebo [shapiro.test(resid(lm(lnCu~Misto)))]

varianty zápisu modelu AR jednoduchého třídění

- **model** – idealizovaná představa o vzniku pozorované hodnoty
- měření = úroveň + náhodná „chyba“
  měření = systematická složka + náhodná složka

$$
\begin{aligned}
Y_{it} &= \mu_i + E_{it} & 1 \le t \le n_i, \quad 1 \le i \le k \\
&= \mu + (\mu_i - \mu) + E_{it} & E_{it} \text{ nezávislé} \\
&= \mu + \alpha_i + E_{it} & E_{it} \sim \mathrm{N}\big(0, \sigma^2\big)
\end{aligned}
$$

- **reparametrizace** (α_i – **efekty** faktoru A):

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

- $\mathrm{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ (totéž jako $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$)
- pro $k = 2$ je $F_A = T^2$ (vztah s dvouvýběrovým t-testem)

mnohonásobná srovnání

(Tukeyův test, Kramerova verze, HSD – honest significance test)

- nutnost zachovat zvolenou hladinu testu i při současném rozhodování o řadě hypotéz
  (např. že $\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_1 = \mu_3, \quad \mu_2 = \mu_3, \quad \ldots$)
- které dvojice úrovní faktoru (stř. hodnoty μ_i resp. efekty α_i) se liší?

$$|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}| \geq q_{k,n-k}(1-\alpha)\sqrt{\frac{S^2}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

kde $q_{k,n-k}(1-\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota

$$S^2 = \frac{S_e}{f_e} = \frac{\sum\sum(Y_{it} - \bar{Y}_{i\bullet})^2}{n-k}$$

příklad játra

místo	počet	průměr	efekt	směr. odchylka
A	7	0,568	0,206	0,312
B	7	0,484	0,121	0,279
C	7	0,495	0,133	0,318
D	7	-0,063	-0,426	0,290
E	7	0,329	-0,034	0,144
celkem	35	0,363	0,000	0,104

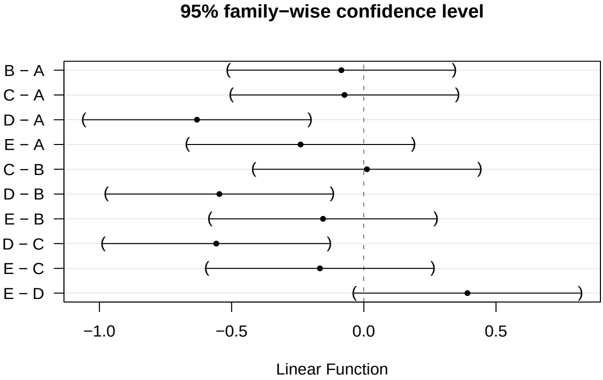
$$q_{5,30}(0{,}95)\sqrt{\frac{0{,}0762}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)} = 4{,}10 \cdot 0{,}104 = 0{,}428$$

$-0{,}063 + 0{,}428 = 0{,}365 \Rightarrow$ na 5% hladině se místa D s nejmenším průměrem liší všechna místa s průměry aspoň 0,365, tedy místa A, B, C, nikoliv E

[TukeyHSD(aov(lnCu∼Misto,data=Med))]

příklad játra

funkce [TukeyHSD(aov(lnCu∼Misto,data=Med))]
dá tabulku porovnání všech dvojic
funkce [plot(TukeyHSD(aov(lnCu∼Misto,data=Med)))]
graficky znázorní porovnání všech dvojic
pomocí knihovny Rcmdr dostaneme také graf



Kruskalův-Wallisův text

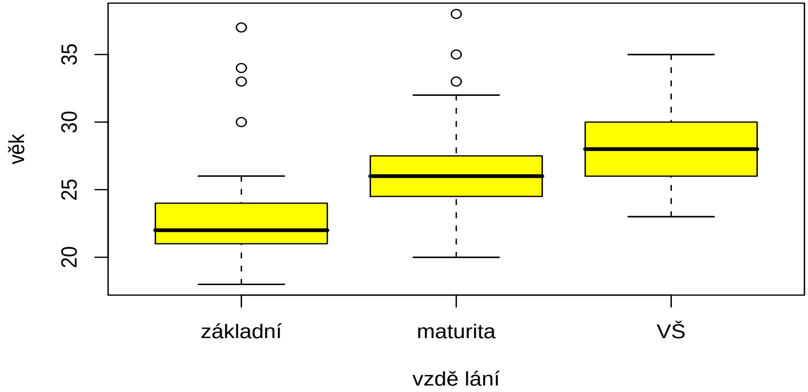
(neparametrický test)

- zobecnění dvouvýběrového Wilcoxonova testu (použije opět pořadí místo původních hodnot)
- předpoklady:
  - k nezávislých výběrů
  - spojitá rozdělení
- H_0: rozdělení jsou stejná (tedy i mediány jsou stejné)
- T_i - součet pořadí v i-tém výběru

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

H_0 se zamítá při $Q \geq \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$
(velká variabilita průměrných pořadí)

příklad kojení – věk matek podle vzdělání



je patrná nesymetrie, zejména u základního vzdělání

příklad kojení – věk matek podle vzdělání

vzdělání	n_i	průměrný věk	střední chyba	součet pořadí	průměrné pořadí
základní	34	23,412	0,638	1025	30,15
maturita	47	26,278	0,543	2618	55,70
VŠ	18	28,500	0,877	1307	72,61
celk.	99	25,697		4950	50,00

$$Q = \frac{12}{99 \cdot 100}\left(\frac{1025^2}{34} + \frac{2618^2}{47} + \frac{1307^2}{18}\right) - 3 \cdot 100 = 29{,}25$$

$$\chi^2_2(0{,}05) = 5{,}99 \qquad p < 0{,}0001$$

[kruskal.test(vek.m∼Vzdelani,data=Kojeni)]

(přesnější hodnocení přihlíží ke shodám při určování pořadí)

porovnání populačních měr polohy

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxon
výběr dvojic	párový t-test	znaménkový, Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
k nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis
výběr r-tic	analýza rozptylu náhodné bloky	Friedman

motivační příklad diety: váhové přírůstky za danou dobu

rozšíření úlohy párového testu

	dieta				
vrh	A	B	C	D	průměr
1	6,6	5,2	7,4	9,1	7,075
2	10,1	11,4	13,0	12,6	11,775
3	5,8	4,2	9,5	8,8	7,075
4	12,1	10,7	11,9	13,0	11,925
5	8,2	8,8	9,6	9,4	9,000
průměr	8,56	8,06	10,28	10,58	9,370

- $r = 4$ ošetření (pevné efekty, zvolili jsme je sami)
- $k = 5$ vrhů (náhodné efekty, zvolila je náhodně příroda)
- jsou patrné rozdíly mezi průměry pro jednotlivá ošetření i pro jednotlivé vrhy
- kdyby byly jen dvě diety ($r = 2$), použili bychom párový test (sourozenci možná reagují na dietu podobně)

náhodné bloky

normální rozdělení náhodné složky modelu

- účel: porovnat dvě nebo více **ošetření** na stejných objektech
- zobecnění **párových testů** na r-tice
- **náhodný blok**
  - homogenní skupina r objektů
  - počet objektů ve skupině = počet ošetření (nebo jeho násobek)
  - ošetření se přiřadí uvnitř bloku **náhodně** (každému ošetření stejný počet objektů)
- bloky – náhodné efekty $A_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma_A^2\right)$ (vliv bloku)
  ošetření – pevné efekty β_j $\left(\sum_{j=1}^r \beta_j = 0\right)$ (vliv ošetření)

$$Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij}, \quad E_{ij} \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right) \quad j = 1, \dots, r; i = 1, \dots, k$$

předpokládá se **aditivní** vliv, symbolicky zapisovaný $A + B$
(vliv ošetření je stejný při různých hodnotách A_i)

náhodné bloky

- testované hypotézy
  - $H_B : \beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$ (ošetření B nemá vliv)
  - případně $H_A : \sigma_A^2 = 0$ (nulová variabilita mezi bloky)
- rozklad variability

$$S_T = S_A + S_B + S_e$$

- vliv dvou **faktorů**
  - A – náhodný: nastavuje příroda, při opakování pokusu budou úrovně jiné
  - B – pevný: nastavuje experimentátor, při opakování pokusu budou úrovně stejné
  - rozhodování zda A je pevný nebo náhodný efekt závisí na cíli výzkumu, na interpretaci

příklad diety

- tabulka ANOVA (správná)

variabilita	S	f	S/f	F	p
vrhy	91,932	4	22,983	(22,26)	(<0,0001)
dieta	23,322	3	7,774	7,53	0,0043
reziduální	12,388	12	1,032	-	-
celk.	127,642	19	-	-	-

- na 5% hladině jsme prokázali rozdíl mezi dietami ($p = 0{,}4$ %)
- variabilita mezi vrhy je také průkazná ($p < 0{,}1$ %)
- [summary(aov(prirustek∼Error(Vrh)+Dieta,data=Mysi))]
- pro takto jednoduchý model vyjde tabulka stejně i když považujeme faktor A za pevný (nenáhodný); porovnáváme pak konkrétních pět vrhů, vrhy nechápeme jako vzorek všech možných vrhů

příklad diety

- kdybychom **nesprávně** nevzali v úvahu závislost některých pozorování způsobenou náhodnými bloky (vrhy), dostali bychom model ANOVA jednoduchého třídění

variabilita	S	f	S/f	F	p
dieta	23,332	3	7,774	1,193	0,344
reziduální	104,320	16	6,520	-	-
celk.	127,642	19	-	-	-

- [summary(aov(prirustek∼Dieta,data=Mysi))]
- porovnání se správnou tabulkou analýzy rozptylu

$$S_e = 91{,}932 + 12{,}388 = 104{,}320, \quad f_e = 4 + 12 = 16$$

Friedmanův test, zobecnění znaménkového testu

(neparametrický test, bez předpokladu normality)

- model $Y_{ij} = \mu + A_i + \beta_j + E_{ij}$ (náhodný řádkový efekt) nebo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij}$ (pevný řádkový efekt, jde vlastně o **dvojné třídění** bez interakcí)
- E_{ij} nezávislé, spojité rozdělení (nemusí být normální)
- $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_r$ (nezávisí na ošetření)
- urči pořadí v rámci každého bloku (řádku) R_{ij}
- za hypotézy je v každém řádku náhodná permutace čísel $1,\ldots,r$, součty ve sloupcích (pro ošetření) jsou podobné
- $$Q = \frac{12}{kr(r+1)} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{k} R_{ij} \right)^2 - 3k(r+1)$$
- zamítat H_0 : pro $Q \geq \chi^2_{r-1}(1-\alpha)$

příklad diety

[friedman.test(prirustek∼Dieta|Vrh,data=Mysi)]

vrh	dieta A	dieta B	dieta C	dieta D	prům.
1	6,6	5,2	7,4	9,1	7,075
2	10,1	11,4	13,0	12,6	11,775
3	5,8	4,2	9,5	8,8	7,075
4	12,1	10,7	11,9	13,0	11,925
5	8,2	8,8	9,6	9,4	9,000
prům.	8,56	8,06	10,28	10,58	9,370

vrh	dieta A	dieta B	dieta C	dieta D	
1	2	1	3	4	
2	1	2	4	3	
3	2	1	4	3	
4	3	1	2	4	
5	1	2	4	3	
součet	9	7	17	17	

$$k = 5$$

$$r = 4$$

$$Q = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 5} \left(9^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2\right) - 3 \cdot 5 \cdot 5 = 9{,}96$$

$$Q > \chi^2_3(0{,}95) = 7{,}8147$$

$$p = 0{,}0189$$

dvojné třídění s interakcemi

motivační příklad Howells

údaje zjištěné na exhumovaných lebkách

- místo: Austrále (AUSTR), Rakousko (BERG), Sibiř (BURIAT)
- pohlaví: M, F
- vysvětlované znaky:
  - největší délka mozkovny GOL
  - týlní úhel OCA
- bude rozdíl mezi pohlavími na všech místech stejný?
  - pokud ano (vliv je aditivní, **dvojné tř. bez interakcí**)

$$Y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ijt}$$

  - pokud ne (vliv není aditivní, rozdíl závisí na místě)

$$Y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + E_{ijt}$$

dvojné třídění s interakcemi

opět **normální rozdělení**, oba faktory **pevné**

- vliv dvou faktorů nemusí být aditivní $(1 \leq t \leq T)$

$$Y_{ijt} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + E_{ijt} \qquad E_{ijt} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

- symbolicky $A + B + AB$
- $\sum_i \alpha_i = 0$ (reparametrizační podmínka)
  efekty faktoru A odpovídající jeho k úrovním
- $\sum_j \beta_j = 0$ (reparametrizační podmínka)
  efekty faktoru B odpovídající jeho r úrovním
- $\sum_i \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_j \gamma_{ij} = 0$ (reparametrizační podmínka)
  interakce vyjadřují neaditivitu obou faktorů
  (vliv A závisí na úrovni B, vliv B závisí na úrovni A), pak
  dvojné třídění bez interakcí (s opakováním pro $T > 1$)

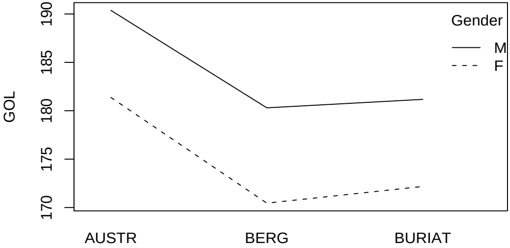
testy ve dvojném třídění

- $H_{AB} : \gamma_{ij} = 0$ (**aditivita** obou faktorů, interakcí netřeba)
  vliv úrovně faktoru A je stejný při všech úrovních faktoru B
  vliv úrovně faktoru B je stejný při všech úrovních faktoru A
  (vliv pohlaví je stejný na všech místech)
- $H_A : \alpha_i = 0$: faktor A nemá vliv (nezáleží na místu)
- $H_B : \beta_j = 0$: faktor B nemá vliv (nezáleží na pohlaví)
- pokud zamítneme H_{AB}, nemá smysl testovat H_A, H_B, neboť prostřednictvím interakcí oba faktory vliv mají
- v takovém případě je lépe přejít k modelu jednoduchého třídění s kombinovanými úrovněmi

příklad Howells

- lebky exhumované na třech místech (A)
- lebky jsou rozlišovány podle pohlaví (B)
- měříme největší délku mozkovny GOL

[anova(lm(gol~Gender*Popul))] nebo [anova(lm(gol~Gender+Popul+Gender:Popul))]



$p_{AB} = 0{,}8872$

příklad Howells (GOL)

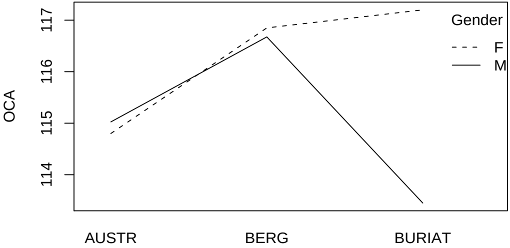
pohlaví	místo	n_{ij}	$\bar{y}_{ij}$	s_{ij}
M	Berg	40	180,300	7,293
F	Berg	40	170,450	6,641
M	Austrálie	40	190,375	5,555
F	Austrálie	40	181,375	6,632
M	Sibiř	40	181,175	6,468
F	Sibiř	40	172,175	5,228

variabilita	S	f	S/f	F	p
místa	5242,1	2	2621,1	65,2	$<$0,0001
pohlaví	5170,8	1	5170,8	128,6	$<$0,0001
interakce	9,6	2	4,8	0,1	0,8872
reziduální	9410,6	234	40,2		
celková	19833,2	239			

příklad Howells

- lebky exhumované na třech místech (A)
- lebky jsou rozlišovány podle pohlaví (B)
- měříme týlní úhel OCA

[anova(lm(oca~Gender*Popul))] nebo
[anova(lm(oca~Gender+Popul+Gender:Popul))]



$p_{AB} = 0{,}0222$

příklad Howells (OCA)

pohlaví	místo	n_{ij}	$\bar{y}_{ij}$	s_{ij}
M	Berg	40	116,675	5,567
F	Berg	40	116,850	5,682
M	Austrálie	40	115,025	4,382
F	Austrálie	40	114,800	4,286
M	Sibiř	40	113,450	4,782
F	Sibiř	40	117,200	4,973

variabilita	S	f	S/f	F	p
místa	150,908	2	75,454	3,05	0,0493
pohlaví	91,267	1	91,267	3,69	0,0560
interakce	191,608	2	95,804	3,87	0,0222
reziduální	5789,550	234	24,742		
celková	6223,333	239			

porovnání populačních měr polohy

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxon
výběr dvojic	párový t-test	znaménkový, Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
k nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis
výběr r-tic	analýza rozptylu náhodné bloky	Friedman

vyšetřování závislosti

nezávisle proměnná(é)	závisle proměnná	
	spojitá	**nominální**
spojitá	regrese korelace	*logistická regrese*
nominální	analýza rozptylu	kontingenční tabulky

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů

korelace a regrese

[correlation, regression]

- **korelace** (dvojice náhodných veličin)
  - měří **sílu** (těsnost) **vzájemné** závislosti **spojitých** veličin
  - lze použít k **prokazování** existence **vzájemné** závislosti X, Y
  - k **porovnávání síly** (těsnosti) závislosti v několika populacích
  - **symetrická** vlastnost veličin X a Y
- **regrese** (náhodná veličina na nenáhodné veličině)
  - udává **jak** závisí střední hodnota **spojité** veličiny Y na nezávisle proměnné (proměnných) x
  - **nesymetrická** vlastnost: (záv. Y na x) $\neq$ (záv. X na y)
  - lze použít k **prokazování existence** závislosti **závisle** proměnné Y na **nezávisle** proměnné x
  - umožňuje **předpovídat** stř. hodnotu Y pro zvolenou hodnotu x

korelační koeficient

(rozlišuj **výběrový** a **populační** korelační koeficient)

- (populační) korelační koeficient $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ (str. 82)
  - $|\rho_{XY}| \leq 1$
  - pro nezávislé X, Y je $\rho_{XY} = 0$
  - konstanta, která měří sílu **lineární** závislosti
- (výběrový) korelační koeficient r_{xy} (zaveden na obr. 37)

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

  - náhodná veličina (závisí na datech)
  - odhaduje populační korelační koeficient ρ_{XY}
  - přesnost odhadu závisí na n
  - alternativní označení: **Pearsonův** korelační koeficient, momentový korelační koeficient, [correlation coefficient]

dokazování závislosti X, Y

- k prokázání závislosti je nutné **normální** rozdělení (X, Y)
- H_0 : X, Y nezávislé (tedy $\rho_{XY} = 0$) se na hladině α zamítá:

$$T = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \sqrt{n - 2}, \qquad |T| \geq t_{n-2}(1 - \alpha/2)$$

  (r je dost daleko od nuly)
- **Spearmanův** korelační koeficient
  - měří sílu **monotonní** závislosti (nejen lineární závislosti)
  - místo hodnot X_i, Y_i použije jejich **pořadí** R_i, Q_i
  - lze upravit na tvar

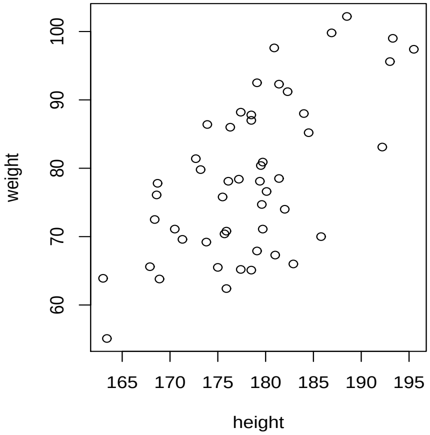
$$r_{XY}^{(S)} = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^{n} (R_i - Q_i)^2$$

  - k testu nezávislosti nepotřebuje normální rozdělení
  - H_0: (nezávislost) se zamítá, je-li $|r_{XY}^{(S)} \sqrt{n - 1}| \geq z(1 - \alpha/2)$

závislost váhy a výšky u mužů

data: Policie

[plot(weight∼height)]



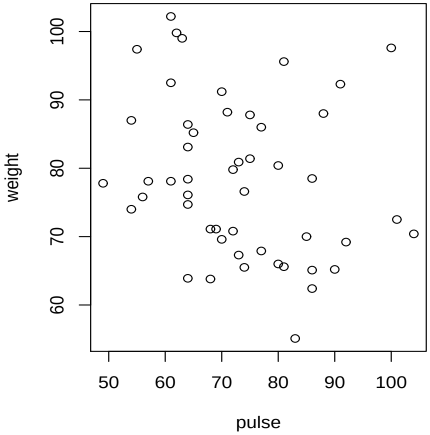
[cor.test(weight,height)]

$$r = 0{,}648$$
$$t = 5{,}814$$
$$p < 0{,}001$$

závislost váhy a pulsu u mužů

data: Policie

[plot(weight∼pulse]



[cor.test(pulse,weight)]

$$r = -0{,}245$$
$$t = -1{,}752$$
$$p = 8{,}6\ \%$$

Fisherova z-transformace

(přibližuje rozdělení výběrového korelačního koeficientu r normálnímu rozdělení)

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{n-3} \right)$$

test shody dvou nezávisle odhadovaných korel. koeficientů

příklad **Kojeni**: výška rodičů chlapců a dívek

- dívky: $r_1 = 0{,}279$, $n_1 = 50$, $z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}279}{1-0{,}279} = 0{,}286$
- hoši: $r_2 = 0{,}150$, $n_2 = 49$, $z_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0{,}150}{1-0{,}150} = 0{,}151$
- test $\mathrm{H}_0 : \rho_1 = \rho_2$ proti $\mathrm{H}_1 : \rho_1 \neq \rho_2$

$$z = \frac{0{,}286 - 0{,}151}{\sqrt{\frac{1}{50-3} + \frac{1}{49-3}}} = 0{,}650.$$

srovnej s kritickou hodnotou $z(1 - 0{,}05/2) = 1{,}960$,
$p = 51{,}6$ %

interval spolehlivosti pro ρ

opět potřebujeme normální rozdělení (X, Y)

- ve dvou krocích:
  - interval spolehlivosti pro $\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$
  - pomocí inverzní transformace pak int. spol. pro ρ
  - takto postupuje funkce cor.test(), např. [cor.test(∼vyska.o+vyska.m,subset=HochL,data=Kojeni)]
- interval spolehlivosti
- náš příklad:

skupina	r (bodový odhad)	95% int. spol. pro ρ	p
dívky	0,279	(0,000; 0,517)	5,01 %
hoši	0,150	(−0,137; 0,414)	30,3 %

- u chlapců nelze prokázat na 5% hladině závislost
- u děvčat je závislost na 10% hladině průkazná, na 5% hladině těsně nikoliv (interval spolehlivosti je jen přibližný!)

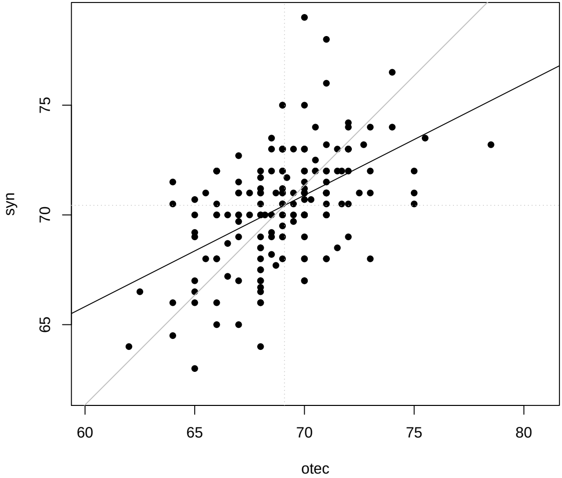
regrese

(původ pojmu)

- tendence (návrat) k průměrnosti
  F. Galton (1886) vyšetřoval dědičnost výšky postavy
- uvažujme otce, jejichž výška je rovna průměrné výšce generace **všech** otců; průměrná výška synů otců této výšky bude rovna průměrné výšce **všech** synů
- uvažujme otce o 10 cm **vyšší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen asi o 5 cm **vyšší**, než průměrná výška generace synů
- uvažujme otce o 10 cm **nižší**, než je průměrná výška generace otců: průměrná výška synů těchto otců bude jen o asi 5 cm **nižší**, než průměrná výška generace synů
- průměrné výšky synů nereprodukují celou odchylku výšky otce od průměru, je tu návrat k průměru (regrese)

Závislost výšky syna na výšce otce

výšky v ang. palcích, Galtonova data, ke každému otci náhodně vybrán jeden z jeho synů
proložena přímka: $y = 35{,}4 + 0{,}5x$, pro porovnání šedivě přímka s jednotkovou směrnicí



regresní přímka

- **předpokládaná** závislost střední hodnoty Y na nenáhodné x:

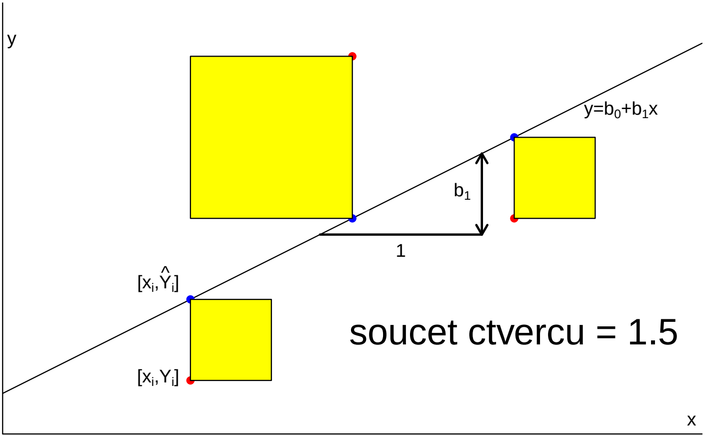
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i, \qquad E_i \sim \mathrm{N}\big(0, \sigma^2\big)$$

- Y_i = systematická složka $(\beta_0 + \beta_1 x_i)$+ náhodná složka (E_i)
- k daným $x_1, \ldots, x_n$ zjistíme $Y_1, \ldots, Y_n$
- předpoklady:
  - **nezávislá** pozorování $Y_1, \ldots, Y_n$ (tedy také $E_1, \ldots, E_n$)
  - **stejný** rozptyl σ^2
  - **normální** rozdělení $E_1, \ldots, E_n$ (potřebné až pro testy, normalitu nelze ověřovat testováním přímo $Y_1, \ldots, Y_n$!)
- neznámé populační parametry β_0, β_1 odhadujeme metodou **nejmenších čtverců**:

  minimalizovat přes β_0, β_1 výraz $$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$
- odhady označíme b_0, b_1

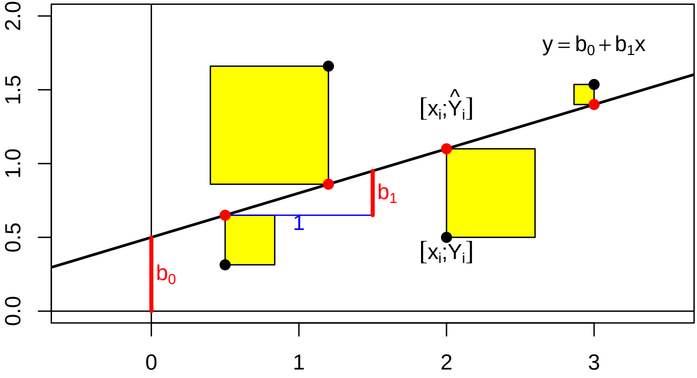
Metoda nejmenších čtverců

přímka vedená třemi červenými body $[x_i, Y_i]$



metoda nejmenších čtverců

odhadovaná závislost:	$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$	(populace)
odhad závislosti:	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	(výběr)
i-tá vyrovnaná hodnota:	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i$	(výběr)
i-té reziduum:	$U_i = Y_i - \hat{Y}_i$	(výběr)
celková plocha čtverců:	$S_e = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$	(výběr)



- b_1 – odhad směrnice β_1
- $b_1 = (b_0 + b_1(x+1)) - (b_0 + b_1 x)$
  – odhad změny střední hodnoty závisle proměnné Y při **jednotkové změně** nezávisle proměnné x
- i-té reziduum $U_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (b_0 + b_1 x_i)$
- $Y_i = \hat{Y}_i + U_i$
- (vysvětlováno)=(vysvětleno závislostí)+(nevysvětleno)
- **reziduální součet čtverců** (nevysvětlená variabilita):

$$S_e = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$$

- **reziduální rozptyl** (odhad rozptylu σ^2)

$$S^2 = \frac{S_e}{n-2}$$

alternativní formulace

- uvažovanou závislost lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} Y_i &= (\beta_0 + \beta_1 \bar{x}) + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + E_i \\ &= \beta_0^* + \beta_1 (x_i - \bar{x}) + E_i \end{aligned}$$

- β_0^* vyjadřuje střední úroveň vysvětlované proměnné Y při průměrné hodnotě nezávisle proměnné x
- β_1 vyjadřuje citlivost, s jakou reaguje střední hodnota vysvětlované proměnné Y na jednotkovou odchylku nezávisle proměnné x od jejího průměru $\bar{x}$
- E_i vyjadřuje náhodnou složku i-tého pozorování, $E_i \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right)$
- odhadem závislosti je (b_1 je stejné jako při klasickém vyjádření)

$$\hat{Y}_i = \bar{Y} + b_1 (x_i - \bar{x})$$

prokazování závislosti

- modelujeme závislost $\mathrm{E}\,Y$ na x pomocí $\mathrm{E}\,Y = \beta_0 + \beta_1 x$
- nezávislost $y = \beta_0 + \beta_1 x$ na x znamená $\beta_1 = 0$
- hypotézu $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$ testujeme pomocí statistiky

$$T = \frac{b_1}{\mathrm{S.E.}(b_1)}$$

- hypotézu zamítáme, je-li $|T| \geq t_{n-2}(1 - \alpha/2)$
  tj. je-li příslušná p-hodnota $\leq \alpha$
- pokud H_0 zamítneme, říkáme, na hladině α je **závislost průkazná**

příklad závislost procenta tuku na výšce

data: Policie

regresor	b_j	S.E.(b_j)	t	p
abs. člen	–53,870	24,657	–2,185	0,0338
height	0,379	0,138	2,742	0,0086

- předpověď: $\hat{Y}_i = -53{,}870 + 0{,}379 \cdot x_i$
- $\widehat{\text{fat}} = -\,53{,}870 + 0{,}379 \cdot \text{height}$
- závislost procenta tuku na výšce je na 5% hladině průkazná, neboť $p = 0{,}86$ %
- na každý centimetr výšky *v průměru* přibude 0,379 procentního bodu tuku
- [summary(lm(fat∼height))]

koeficient determinace

[coefficient of determination]

- podíl variability Y vysvětlené uvažovanou závislostí (jakou část variability Y se podařilo závislostí na x vysvětlit)
-

$$R^2 = \frac{\text{variabilita vysvětlená}}{\text{variabilita vysvětlovaná}} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$
$$= 1 - \frac{\text{variabilita nevysvětlená}}{\text{variabilita vysvětlovaná}} = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$
$$= 1 - \frac{S_e}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

- R^2 je bezrozměrné číslo, často vyjádřeno v procentech
- R^2 ukazuje, zda má smysl předpovídat pomocí regrese
- v případě regresní přímky je $R^2 = r_{XY}^2$

tabulka analýzy rozptylu

variabilita	součet čtverců	st. vol.	prům. čtverec	F	p
regrese	362,54	1	362,54	7,519	0,0086
rezid.	2314,41	48	48,22		
celk.	2676,95	49	(54,63)		

- $$s^2 = 48{,}22$$
- $$R^2 = \frac{362{,}54}{2676{,}95} = 1 - \frac{2314{,}41}{2676{,}95} = 0{,}135$$
- závislostí na výšce jsme vysvětlili jen 13,5 % variability procenta tuku
- [anova(lm(fat∼height))]

mnohonásobná lineární regrese

- závislost na dvou (nebo více) nezávisle proměnných
- pozorování $(x_1, v_1, Y_1), \dots, (x_n, v_n, Y_n)$
- představa (model)

$$Y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i}_{\mathrm{E}\, Y_i} + E_i$$

- střední hodnota Y_i (tj. systematická, nenáhodná složka Y_i) vysvětlena pomocí x_i, v_i jako $\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 v_i$
- $E_1, \dots, E_n$ (také $Y_1, \dots, Y_n$) jsou **nezávislé** náhodné veličiny
- $E_i \sim \mathrm{N}\big(0, \sigma^2\big)$ (normální rozdělení se stejným rozptylem)
- b_0, b_1, b_2 – odhady parametrů $\beta_0, \beta_1, \beta_2$

interpretace

- b_1 – odhad změny střední hodnoty Y při **jednotkové** změně x a **nezměněné** hodnotě v
- b_2 – odhad změny střední hodnoty Y při **jednotkové** změně v a **nezměněné** hodnotě x
- U_i – **reziduum**

$$U_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (b_0 + b_1 x_i + b_2 v_i)$$

- **rozklad variability** $S_T = S_R + S_e$

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

koeficient determinace

- **koeficient determinace** R^2
  podíl celkové variability, který se podařilo vysvětlit závislostí Y na x a v (jakou část variability Y se podařilo vysvětlit)

$$R^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_e}{S_T}$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ (chování Y nezávisí ani na x ani na v)

$$F = \frac{S_R/2}{S_e/(n-3)} \geq F_{2,n-3}(1-\alpha)$$

- p-hodnota tohoto testu bývá uváděna spolu s R^2

testy o přínosu jednotlivých regresorů

- model $\quad y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 v$
- $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = 0$
  k vysvětlení chování Y stačí x, tj. $y = \beta_0 + \beta_1 x$

$$T_2 = \frac{b_2}{\mathrm{S.E.}(b_2)}, \qquad \text{zamítat pro } |T_2| \geq t_{n-3}(1-\alpha/2)$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$
  k vysvětlení chování Y stačí v, tj. $y = \beta_0 + \beta_2 v$

$$T_1 = \frac{b_1}{\mathrm{S.E.}(b_1)}, \qquad \text{zamítat pro } |T_1| \geq t_{n-3}(1-\alpha/2)$$

- $\mathrm{H}_0 : \beta_0 = 0$ zpravidla nemá reálný smysl

příklad: závislost procenta tuku na výšce a váze

data: Policie

regresor	b_j	S.E.(b_j)	t	p
abs. člen	11,327	16,682	0,679	0,5005
height	−0,262	0,110	−2,376	0,0216
weight	0,624	0,0690	9,050	<0,0001

- [summary(lm(fat∼height+weight))]
- při **stejné výšce** očekáváme na každý kg hmotnosti o 0,6 proc. bodu více tuku
- u mužů, kteří se liší výškou o 10 cm a **mají stejnou hmotnost** očekáváme, že ti vyšší mají v průměru o 2,6 proc. bodu **méně** tuku
- na 5% hladině nelze vyloučit výšku, průkazně přispívá k vysvětlení pomocí váhy
- na 1% hladině nelze vyloučit váhu, průkazně přispívá k vysvětlení pomocí výšky

tabulka analýzy rozptylu

(F-statistika je v summary(), v commanderu nutno zvolit typ I a přínosy regresorů sečíst)

variabilita	souč. čtv,	st. vol.	prům. čtv.	F	p
regrese	1833,11	2	916,55	51,050	<0,001
rezid.	843,85	47	17,95		
celk.	2676,95	49	(54,63)		

- $R^2 = 1833{,}11/2676{,}95 = 1 - 843{,}85/2676{,}95 = 0{,}685$
- závislostí na výšce a váze jsme vysvětlili 68,5 % variability procenta tuku
- $s^2 = 17{,}95$
- na každé rozumné hladině zamítáme hypotézu, podle které procento tuku nezávisí ani na výšce ani na váze

regresní diagnostika

zda byly splněny předpoklady

a) zvolili jsme správně **tvar závislosti**?

b) je **rozptyl** všude **stejný**?

c) je přiměřeně splněn předpoklad o **normálním rozdělení**?

d) jsou opravdu pozorování **nezávislá**?
problém často tam, kde působí čas

- k odstranění problémů s body a), b), c) často pomůže transformace, např. logaritmování závisle proměnné
- [plot(lm(fat∼height+weight))]

vyšetřování závislosti

nezávisle proměnná(é)	závisle proměnná	
	spojitá	**nominální**
spojitá	regrese korelace	(*logistická regrese*)
nominální	analýza rozptylu	kontingenční tabulky

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů

hodnocení kvalitativních znaků

- znaky v **nominálním** měřítku
- někdy i v ordinálním měřítku, ale uspořádání zde přehlížíme
- postupy pro ordinální znaky existují, ale zde není pro ně čas
- **příklady**
  - počty osob s krevními skupinami A, B, AB, 0
  - počty dětí narozených v jednotlivých měsících v Praze
  - počty matek se základním, středním, vysokoškolským vzděláním
- statistické jednotky třídíme podle hodnoty nominálního znaku do k neslučitelných kategorií
- výsledkem je k-tice (náhodný vektor) četností
- modelem pro tento vektor je multinomické rozdělení

multinomické rozdělení

příklad: hod hrací kostkou, $k = 6$

- v dílčím pokusu k možných výsledků (jevů) $A_1, \ldots, A_k$
- $A_1, \ldots, A_k$ jsou neslučitelné jevy, sjednocení všech je jev jistý
- π_j je pst, že vyjde A_j $(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_k = 1)$
- n **nezávislých** dílčích pokusů (n opakování)
- N_j – počet dílčích pokusů, kdy nastalo A_j
- $(N_1, \ldots, N_k)$ má multinomické rozdělení s parametry $n, \pi_1, \ldots, \pi_k$
- **pravděpodobnost** toho, že $N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n, \quad n_1 \geq 0, \ldots, n_k \geq 0)$

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \pi_1^{n_1} \ldots \pi_k^{n_k}$$

souvislost s binomickým rozdělením

příklad: zajímáme se jen šestku na hrací kostce

- pro $k = 2$ jsou v dílčím pokusu jen dva možné výsledky, binomické rozdělení je speciálním případem multinomického

$$\mathrm{P}\left(N_1 = n_1, N_2 = n_2\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}$$

  je totéž jako (platí přece $n_1 + n_2 = n$)

$$\mathrm{P}\left(N_1 = n_1\right) = \binom{n}{n_1}\pi_1^{n_1}(1 - \pi_1)^{n-n_1}$$

- každé N_j (samotné, proti ostatním četnostem) má binomické rozdělení, tedy

$$\boxed{N_j \sim \mathrm{bi}(n, \pi_j), \quad \mathrm{E}\, N_j = n\pi_j}$$

vlastnost χ^2 (chí-kvadrát), chí-kvadrát test dobré shody

(X^2 – velké χ^2)

- platí pro velká n, např. pokud $n\pi_j \geq 5$ pro všechna j,

$$\boxed{X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}}$$ má přibližně rozdělení χ^2_{k-1}

- **chí-kvadrát test dobré shody** $\mathrm{H}_0 : \pi_1 = \pi_1^0, \dots, \pi_k = \pi_k^0$ (pravděpodobnosti jsou hypotézou dány **jednoznačně**)
- platí-li H_0, očekáváme četnosti blízké hodnotám $\mathrm{E}\, N_j = n\pi_j^0$:
- H_0 zamítáme, je-li $X^2 \geq \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$,

$$\boxed{X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\pi_j^0)^2}{n\pi_j^0}}$$

- N_j – **empirické** (experimentální) četnosti,
  $n\pi_j^0$ – **očekávané** (za platnosti H_0, teoretické) četnosti
- statistika X^2 (velké chí-kvadrát) porovnává empirické a očekávané četnosti (měří jejich neshodu, „vzdálenost“)

počty studentů biologie narozených v jednotlivých měsících

nulová hypotéza: děti se rodí během roku **rovnoměrně**

[chisq.test(nj,p=c(31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31)/365)]

měsíc	n_j	$n\pi_j^0$	přínos k chí-kvadrát
1	11	9,43	0,2623
2	9	8,52	0,0276
3	13	9,43	1,3539
4	11	9,12	0,3861
5	8	9,43	0,2161
6	5	9,12	1,8635
7	10	9,43	0,0348
8	6	9,43	1,2461
9	13	9,12	1,6473
10	8	9,43	0,2161
11	8	9,12	0,1383
12	9	9,43	0,0194
celkem	111	111,00	7,4115

$$X^2 = 7{,}4115 < \chi^2_{12-1}(0{,}95) = 19{,}675 \qquad p = 76{,}5\ \%$$

příklad: reprezentativnost výběru

(**porovnat procenta** v populaci a výběru **nestačí**)

- ve vzorku pacientů byly počty osob s krevními skupinami 0, A, B a AB po řadě 56, 72, 54, 18 (tedy $n = 200$)
- ve vyšetřované populaci jsou krevní skupiny 0, A, B a AB v poměru 35 %, 35 %, 20 % a 10 % (to určuje H_0)
- **v průměru** očekáváme četnosti $200 \cdot 0{,}35 = 70 \qquad (70, 40, 20)$
- lze považovat tento výběr za **reprezentativní vzhledem k výskytu krevních skupin**?

$$\chi^2 = \frac{(56-70)^2}{70} + \frac{(72-70)^2}{70} + \frac{(54-40)^2}{40} + \frac{(18-20)^2}{20}$$
$$= 7{,}96 > 7{,}81 = \chi^2_3(0{,}95) \qquad p = 4{,}7\ \%$$

- výběr **nelze** považovat za reprezentativní
- při polovičních četnostech ve výběru (28, 36, 27, 9) by vyšlo $\chi^2 = 3{,}98$, $p = 26{,}4$ % (**lze** považovat za reprezentativní)

příklad hrách: barva květů a tvar pylových zrnek

segregace dvou typů genů (C. R. Rao: Lineární metody statistické indukce ..., str. 439)

- barva květů – purpurová : červená v poměru 3 : 1 (dáno)
- tvar pylu – oválný : kulatý v poměru 3 : 1 (dáno)
- platí-li nulová hypotéza (H_0 : jde o **nezávislou** segregaci), pak čtyři možné kombinace musí být v poměru 9 : 3 : 3 : 1

barva tvar	pupurová oválný	červená oválný	purpurová kulatý	červená kulatý	celkem
n_j	296	27	19	85	427
o_j	3843/16	1281/16	1281/16	427/16	427
$\frac{(n_j - o_j)^2}{o_j}$	12,97	35,17	46,57	127,41	222,12

$$\chi^2 = 222{,}12 > \chi^2_3(0{,}95) = 7{,}81$$

- nezávislost jsme **zamítli**

příklad hrách: barva květů a tvar pylových zrnek

dodatečné ověření předpokladu známého poměru

- co způsobilo zamítnutí hypotézy?

barva	purpurová	červená	celkem
oválný tvar	296	27	323
kulatý tvar	19	85	104
celkem	315	112	427

- jsou barvy v očekávaném poměru 3 : 1?
  [chisq.test(c(315,112),p=c(3/4,1/4))]

$$\chi^2 = 0{,}3443 \qquad p = 55{,}7\ \%$$

- jsou tvary v očekávaném poměru 3 : 1?

$$\chi^2 = 0{,}0945 \qquad p = 75{,}9\ \%$$

- důvodem zamítnutí je nutně závislost

stejný příklad, štěpné poměry neznáme

proč takto počítáme, bude časem

tvar	barva		
	purpurová	červená	celkem
oválný	296	27	323
kulatý	19	85	104
celkem	315	112	427

očekávané četnosti:

$$323 \cdot 315/427 = 238{,}28 \qquad 323 \cdot 112/427 = 84{,}72$$
$$104 \cdot 315/427 = 76{,}72 \qquad 104 \cdot 112/427 = 27{,}28$$

$$\chi^2 = \frac{(296-238{,}28)^2}{238{,}28} + \frac{(27-84{,}72)^2}{84{,}72} + \frac{(19-76{,}72)^2}{76{,}72} + \frac{(85-27{,}28)^2}{27{,}28} = 215{,}10$$

$p < 0{,}001$, očekávané četnost jsou větší, než 5

složená nulová hypotéza (hypotéza o struktuře)

- hypotéza určuje vztahy mezi pravděpodobnostmi $\pi_1, \dots, \pi_k$ některé parametry zůstávají volné, je třeba je odhadnout
- příklad antigen: (Hardy-Weinberg equilibrium, nezávislost) model pro fenotypy AA, Aa, aa

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(AA) &\equiv \pi_1(\theta) = \theta^2 \\ \mathrm{P}(Aa) &\equiv \pi_2(\theta) = 2\theta(1-\theta) \\ \mathrm{P}(aa) &\equiv \pi_3(\theta) = (1-\theta)^2 \end{aligned}$$

- neurčený parametr θ – pravděpodobnost alely A
- jsou zjištěné četnosti fenotypů $n_1 = 18$, $n_2 = 17$, $n_3 = 6$ v souladu s modelem, tj. s H-W rovnováhou?

odhad metodou maximální věrohodnosti za H_0

[maximum likelihood estimate]

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}(\theta^2)^{n_1}(2\theta(1-\theta))^{n_2}((1-\theta)^2)^{n_3}$$

- najít θ takové, aby pravděpodobnost konkrétního výsledku byla maximální možná (maximálně věrohodná)
- odhad θ maximalizací *logaritmické věrohodnostní funkce*

$$\begin{aligned}\ell(\theta) &= \ln(P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3)) \\ &= \ln\left(c_1\left(\theta^2\right)^{n_1}(2\theta(1-\theta))^{n_2}\left((1-\theta)^2\right)^{n_3}\right) \\ &= c_2 + (2n_1 + n_2)\ln\theta + (n_2 + 2n_3)\ln(1-\theta)\end{aligned}$$

- v našem příkladu vyjde

$$\hat{\theta} = \frac{2 \cdot N_1 + N_2}{2n} \quad \left(= \frac{2 \cdot 18 + 17}{82} = 0{,}646 \right)$$

(počet alel A na počet „míst“ pro alely)

- θ má obecně q nezávislých složek, zde $q = 1$
každý odhadovaný parametr ubere jeden stupeň volnosti
- H_0 zamítá pokud

$$X^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - n\pi_j(\hat{\theta}))^2}{n\pi_j(\hat{\theta})} \geq \chi^2_{k-1-q}(1-\alpha)$$

- příklad: $\chi^2 = 0{,}355 < \chi^2_{3-1-1}(0{,}95) = 3{,}84$
$p = 55{,}1\ \%$ hypotézu na 5% hladině nemůžeme zamítnout

nezávislost **nominálních** znaků

příklad hrách: barva květů a tvar pylových zrnek

- nominální znak s hodnotami $A_1, \ldots, A_r$ (tvar)
- nominální znak s hodnotami $B_1, \ldots, B_c$ (barva)
- N_{ij} kolikrát současně A_i a B_j (**sdružené četnosti**)
- **marginální** četnosti

$$N_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} N_{ij} \qquad N_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$$

- **nezávislost** znaků: pro všechny dvojice i, j platí

$$\mathrm{P}(A_i \cap B_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B_j)$$

- charakteristika nezávislosti: z **marginálních** pstí jevů A_i, B_j dokážeme rekonstruovat **sdružené psti** jevů $A_i \cap B_j$

test nezávislosti dvou kvalitativních znaků

hodnocení kontingenční tabulky

- H_0 : znaky jsou **nezávislé**

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(N_{ij} - o_{ij})^2}{o_{ij}}$$

- teoretické četnosti (protějšek N_{ij}) – četnosti, které **v průměru očekáváme, platí-li hypotéza**

$$o_{ij} = n \cdot \widehat{\mathrm{P}(A_i \cap B_j)} = n \cdot \widehat{\mathrm{P}(A_i)} \cdot \widehat{\mathrm{P}(B_j)} = n \cdot \frac{N_{i\bullet}}{n} \cdot \frac{N_{\bullet j}}{n} = \frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}$$

- nezávislost se zamítá pokud $X^2 \geq \chi^2_{(r-1)(c-1)}(1-\alpha)$
- stupně volnosti $n - 1 - q = r \cdot c - 1 - (r-1) - (c-1) = r \cdot c - r - c + 1 = (r-1)(c-1)$
- mělo by být $o_{ij} \geq 5 \ \forall \ (i,j)$ (tj. pro všechny dvojice)

příklad barva květů a tvar pylových zrnek

štěpný poměr neznáme

tvar	barva		
	purpurová	červená	celkem
oválný	296	27	323
kulatý	19	85	104
celkem	315	112	427

očekávané četnosti:

$$323 \cdot 315/427 = 238{,}28 \qquad 323 \cdot 112/427 = 84{,}72$$
$$104 \cdot 315/427 = 76{,}72 \qquad 104 \cdot 112/427 = 27{,}28$$

$$\chi^2 = \frac{(296-238{,}28)^2}{238{,}28} + \frac{(27-84{,}72)^2}{84{,}72} + \frac{(19-76{,}72)^2}{76{,}72} + \frac{(85-27{,}28)^2}{27{,}28} = 222{,}12$$

$p < 0{,}001$, očekávané četnost jsou větší, než 5

příklad: kouření u mužů

data: Ichs

empirické sdružené a marg. četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	14	55	55	73	197
bývalý k.	11	28	44	42	125
kuřák	14	24	24	17	79
silný k.	78	189	175	106	548
celkem	117	296	298	238	949

očekávané sdružené a marg. četnosti

vzdělání	zákl.	odb.	mat.	VŠ	celk.
nekuřák	24,3	61,4	61,9	49,4	197
bývalý k.	15,4	39,0	39,3	31,3	125
kuřák	9,7	24,6	24,8	19,8	79
silný k.	67,6	170,9	172,1	137,4	548
celkem	117	296	298	238	949

[chisq.test(matrix(c(14,11,14,78, 55,28,24,189, 55,44,24,175, 73,42,17,106),nr=4,nc=4))]

závislost jsme na 5% hladině prokázali

$$\chi^2 = \frac{(14-24{,}3)^2}{24{,}3} + \dots + \frac{(106-137{,}4)^2}{137{,}4} = 38{,}68$$

$$f = (4-1)(4-1) = 9$$

$$p < 0{,}0001$$

příklad **Baden**

barva očí	barva vlasů				celkem
	světlá	hnědá	černá	ryšavá	
modrá	1 768	807	189	47	2 811
šedá/zelená	946	1 387	746	53	3 132
hnědá	115	438	288	16	857
celkem	2 829	2 632	1 223	116	6 800

- barva očí $r = 3$, barva vlasů $c = 4$, $n = 6800$
- $o_{11} = 2811 \cdot 2829/6800 = 1169\ldots$
- $o_{34} = 116 \cdot 857/6800 = 14{,}62 \geq 5$

$$\chi^2 = \frac{(1768 - 1169)^2}{1169} + \frac{(807 - 1088)^2}{1088} + \ldots = 1073{,}5$$
$$> \chi^2_6(0{,}95) = 12{,}5916$$
$$p < 0{,}0001$$

závislost je na každé rozumné hladině **prokázána**

test **homogenity**

též test o shodnosti struktury pravděpodobností

- hodnoty znaku $B_1, \ldots, B_c$
- r **nezávislých** výběrů z různých populací
- H_0 : populace se **neliší**
- dál stejně jako pro nezávislost
- příklad **krevní skupiny**

populace	skupina				celkem
	0	A	B	AB	
C	121	120	79	33	353
D	118	95	121	30	364
celkem	239	215	200	63	717

$$\chi^2 = \frac{(121 - 353 \cdot 239/717)^2}{353 \cdot 239/717} + \ldots = 11{,}742 > \chi^2_3(0{,}95) = 7{,}815$$

nejm. teoretická četnost: $353 \cdot 63/717 = 31{,}02 > 5$, $p = 0{,}8$ %

McNemarův test (test symetrie)

nezaměňovat s testem nezávislosti!

- **párový** test pro nominální veličinu s hodnotami $B_1, \ldots, B_k$
- zjišťujeme hodnoty nominálního znaku na **stejných** objektech za **dvojích** okolností (před ošetřením, po ošetření)
- N_{ij} počet objektů, u nichž první měření B_i a druhé měření B_j
- **nulová hypotéza**: pravděpodobnosti možných hodnot znaku jsou **stejné** za obojích okolností (před ošetřením i po něm)

$$X^2 = \sum_{i<j}\sum \frac{(N_{ij} - N_{ji})^2}{N_{ij} + N_{ji}}$$

- hypotézu zamítneme při $X^2 \geq \chi^2_{k(k-1)/2}(1-\alpha)$
- výrazy ve jmenovateli musí být kladné!
- nezávisí na počtu objektů, kdy vyšly oba výsledky stejně (N_{ii})

příklad **stromy**

1994	1995			celkem
	1	2	3	
1	4	3	3	10
2	7	21	11	39
3	1	15	35	51
celkem	12	39	49	100

- stav týchž stromů ve dvou sezónách
- celkem 100 stromů

$$\chi^2 = \frac{(3-7)^2}{3+7} + \frac{(3-1)^2}{3+1} + \frac{(11-15)^2}{11+15} = 3{,}215$$

- $\chi^2_3(0{,}95) = 7{,}8147, \quad p = 36{,}0\ \%$
- rozdíl mezi sezónami jsme neprokázali
- [mcnemar.test(matrix(c(4,7,1,3,21,15,3,11,35),3,3))]

čtyřpolní tabulka (tabulka 2×2)

znovu test nezávislosti či homogenity

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	n

- speciální případ kontingenční tabulky pro $r = c = 2$
- test nezávislosti i test homogenity

  statistiku lze upravit na pohodlnější vyjádření

$$X^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

zamítá se pro $X^2 \geq \chi^2_1(1-\alpha) \qquad (= z(1-\alpha/2)^2)$

případ malých četností

- je-li některá očekávaná četnost malá, pak lze u čtyřpolní tabulky použít upravený postup: **Yatesova korekce**

$$X_Y^2 = \frac{n(|ad - bc| - n/2)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

- **Fisherův exaktní** test počítá přímo dosaženou hladinu p
- pro tabulku s velkými četnostmi je výpočet Fisherova testu výpočetně náročný (paměťové nároky, trvání výpočtu)
- existuje zobecnění Fisherova testu i pro větší tabulky, než je čtyřpolní

komplexní příklad **hraboš**

Frenkelia spp.	*Sarcocystis spp.* +	*Sarcocystis spp.* −	celkem
+	4	27	31
−	11	473	484
celkem	15	500	515

- souvisí spolu nákazy dvěma cizopasníky?
- nulová hypotéza: **nezávislost**

$$\chi^2 = \frac{515(4 \cdot 473 - 11 \cdot 27)^2}{15 \cdot 500 \cdot 31 \cdot 484} = 11{,}643, \quad p = 0{,}06\ \%$$

- nejmenší očekávaná četnost: $15 \cdot 31/515 = 0{,}9 < 5$
- [chisq.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2),correct=FALSE)]

příklad **hraboš**

- **Yates**: $\chi^2 = 8{,}187$ $p = 0{,}42\ \%$
  [chisq.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2))]
- **Fisherův test**: $p = 0{,}92\ \%$
  [fisher.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2))]
- na 5% hladině závislost **prokázána**
- **vyskytují se dvojí cizopasníci se stejnou pstí?**
  (zcela jiná otázka, než na nezávislost)
- odpověď dá McNemarův test:

$$\chi^2 = \frac{(11-27)^2}{11+27} = 6{,}7368, \qquad p = 0{,}94\ \%$$

[mcnemar.test(matrix(c(4,11,27,473),2,2),correct=FALSE)]

jak statistiku použijeme

- co o problému zjistili jiní? (přečti, sepiš)
- co chceš zjistit?
  - zformuluj otázku (to určí možné statistické metody)
  - zformuluj nulovou a alternativní hypotézu
- zvol hladinu testu α
- zvol rozsah výběru (přesnost, délka int. spolehlivosti, síla testu)
- pořiď data
  - proveď měření (podrobné záznamy!)
  - převeď do elektronické formy (kódování)
  - vyčisti data (grafy, popisné statistiky,...)
- proveď výpočty, kresli grafy
- použij výsledky a grafy, interpretuj

dvojí původ dat

- **plánovaný** (organizovaný) **pokus**
  - aktivně zasahujeme
  - fixujeme okolnosti (stálá teplota, světelný režim)
  - nastavujeme úrovně zvoleného faktoru (např. živné roztoky)
  - jedincům náhodně přiřazujeme ošetření
  - zjistíme-li rozdíl, známe jeho příčinu
- **šetření** (sledování dění)
  - pouze sledujeme, nezasahujeme
  - rozdíl mezi porovnávanými skupinami může být způsoben matoucí (**confounding**) veličinou, která souvisí s rozdělením do skupin i s měřeným znakem (příklad: plánované těhotenství na vzdělání matky, matoucí veličinou je věk matky)
  - rozdělení do skupin nemůžeme ovlivnit, je dáno
  - může záležet na tom, zda dělíme podle možných příčin (kohortové studie, poměr rizik RR vypovídá) nebo následků (case-control, RR nevypovídá, poměr šancí OR ano)

jaké úlohy řešíme

dělení podle skupin statistických metod

- **popsat stav** (popisná statistika, Exploratory Data Analysis ⇒ formulace vědeckých hypotéz)
  - poloha (průměr, medián, kvartily,. . .)
  - variabilita (směr. odchylka, rozptyl, kvartilové rozpětí)
  - závislost (korelační koeficient, Spearmanův korel. koeficient)
  - tvar rozdělení (šikmost, špičatost)
- **prokázat vliv ošetření** (induktivní, konfirmační statistika)
  - změna polohy (t-testy, analýza rozptylu)
  - změna variability (Levene, F-test, Bartlettův test)
  - jiná změna rozdělení (Kolmogorov-Smirnov)
- **prokázat závislost** (induktivní, konfirmační statistika)
  - obě spojité (korelační koeficient, regrese)
  - spojitá na kvalitativními (ANOVA)
  - obě kvalitativní (chí-kvadrát v kontingenční tabulce)
  - **predikce** spojité veličiny na spojitých či kvalitativních (regrese)

výběr metody

- jakou úlohu řešíme?
- jsou výběry nezávislé?
  - zajistit organizací pokusu
- lze předpokládat normální rozdělení?
  - lze soudit z grafu (normální diagram)
  - lze ověřovat pomocí testů
  - v jednotlivých výběrech nebo z reziduí (v regresi)
- je rozptyl stálý?
  - lze soudit z grafu (rozptylový diagram)
  - lze ověřovat pomocí testů
  - porovnat výběry nebo z reziduí
  - u regrese lze ověřit pomocí Breuschova-Paganova testu

volba nulové a alternativní hypotézy

- H_0 zjednodušuje model
  - hypotéza přesněji určuje model (např. test dobré shody)
  - populace se neliší (výběry se liší jen náhodně)
  - veličiny jsou nezávislé
  - H_0 zpravidla chceme vyvrátit abychom prokázali svoji vědeckou hypotézu
- H_1 je opak nulové hypotézy
  - pokud existuje jednostranná alternativní hypotéza, musíme ji zvolit **před pokusem** na základě úvah, které **nejsou** založeny na použitých datech
  - zpravidla obsahuje více možností než nulová hypotéza
  - zpravidla obsahuje tvrzení, které chceme dokázat
- pouze zamítnutím H_0 něco dokazujeme
- u každého testu jsou nulová i alternativní hypotézy dány, nemůžeme je přehodit

porovnání populačních měr polohy

rozdělení	normální	spojité
populační parametr (o čem je hypotéza)	populační průměr	populační medián (distribuční funkce)
jeden výběr	jednovýběrový t-test	jednovýběrový Wilcoxon
výběr dvojic	párový t-test	znaménkový, Wilcoxon
dva nezávislé výběry	dvouvýběrový t-test	Mann-Whitney (Kolmogorov-Smirnov)
k nezávislých výběrů	analýza rozptylu jedn. třídění	Kruskal-Wallis
výběr r-tic	analýza rozptylu náhodné bloky	Friedman

vyšetřování závislosti

nezávisle proměnná(é)	závisle proměnná	
	spojitá	**nominální**
spojitá	regrese korelace	(*logistická regrese*)
nominální	analýza rozptylu	kontingenční tabulky

příklady:

- hmotnost na výšce
- rakovina plic na počtu vykouřených cigaret
- hmotnost obilky na živném roztoku
- barva očí a barva vlasů