

Statistika

(MD360P03Z, MD360P03U)
ak. rok 2007/2008

Karel Zvára

karel.zvara@mff.cuni.cz
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zvara>

5. listopadu 2007



alternativní rozdělení

- ▶ diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- ▶ $P(X = 1) = \pi$, $P(X = 0) = 1 - \pi$ ($0 < \pi < 1$)
- ▶ X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- ▶ **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \pi$$

- ▶ (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 P(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 P(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \pi + \pi^2 (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

alternativní rozdělení

- ▶ diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- ▶ $P(X = 1) = \pi$, $P(X = 0) = 1 - \pi$ ($0 < \pi < 1$)
- ▶ X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- ▶ **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \pi$$

- ▶ (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 P(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 P(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \pi + \pi^2 (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

alternativní rozdělení

- ▶ diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- ▶ $P(X = 1) = \pi$, $P(X = 0) = 1 - \pi$ ($0 < \pi < 1$)
- ▶ X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- ▶ **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \pi$$

- ▶ (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 P(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 P(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \pi + \pi^2 (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

alternativní rozdělení

- ▶ diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- ▶ $P(X = 1) = \pi$, $P(X = 0) = 1 - \pi$ ($0 < \pi < 1$)
- ▶ X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- ▶ **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \pi$$

- ▶ (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 P(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 P(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \pi + \pi^2 (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

alternativní rozdělení

- ▶ diskrétní, s jediným parametrem π (nikoliv Ludolfovo číslo)
- ▶ $P(X = 1) = \pi$, $P(X = 0) = 1 - \pi$ ($0 < \pi < 1$)
- ▶ X – kolikrát v jednom pokusu došlo k události, která má pravděpodobnost π (jen dvě možné hodnoty: 0 nebo 1)
- ▶ **střední hodnota** (populační průměr)

$$\mu_X = 1 \cdot P(X = 1) + 0 \cdot P(X = 0) = \pi$$

- ▶ (populační) **rozptyl**

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1 - \mu_X)^2 P(X = 1) + (0 - \mu_X)^2 P(X = 0) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \pi + \pi^2 (1 - \pi) = \pi(1 - \pi)\end{aligned}$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s pstí $1 - \pi$
- ▶ celk. počet zdarů X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n nezávislých náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu nezávislých náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s pstí $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s postí $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s pstí $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s postí $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n **nezávislých** náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu **nezávislých** náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení s parametry n, π ($0 < \pi < 1$)
- ▶ n **nezávislých** pokusů
- ▶ v každém zdar s pravděpodobností π , nezdar s postí $1 - \pi$
- ▶ **celk. počet zdarů** X má binomické rozdělení s parametry n, π
- ▶ zapisujeme $X \sim bi(n, \pi)$
- ▶ X je součet n nezávislých náhodných veličin X_i
($X_i =$ počet zdarů v i -tém pokusu)
každé X_i má alternativní rozdělení s parametrem π
- ▶ z vlastnosti střední hodnoty součtu náh. veličin: $\mu_X = n\pi$
- ▶ z vlastnosti rozptylu součtu nezávislých náhodných veličin

$$\sigma_X^2 = n\pi(1 - \pi)$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (2)

- ▶ pravděpodobnosti možných hodnot

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ pst, že v **daných** k pokusech zdar Z , v ostatních nezdar N

$$\underbrace{ZZ \dots Z}_k \underbrace{NN \dots N}_{n-k} \text{ s pstí } \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

- ▶ zvolíme k míst pro zdar Z , na ostatních místech nezdar N , počet možností:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1}$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (2)

- ▶ pravděpodobnosti možných hodnot

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ pst, že v **daných** k pokusech zdar Z , v ostatních nezdar N

$$\underbrace{ZZ \dots Z}_k \underbrace{NN \dots N}_{n-k} \text{ s pstí } \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

- ▶ zvolíme k míst pro zdar Z , na ostatních místech nezdar N , počet možností:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1}$$

binomické rozdělení $bi(n, \pi)$ (2)

- ▶ pravděpodobnosti možných hodnot

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ pst, že v **daných** k pokusech zdar Z , v ostatních nezdar N

$$\underbrace{ZZ \dots Z}_k \underbrace{NN \dots N}_{n-k} \text{ s pstí } \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

- ▶ zvolíme k míst pro zdar Z , na ostatních místech nezdar N , počet možností:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 2 \cdot 1}$$

příklad: zkoušky

- ▶ C – zdar = udělat zkoušku, $P(C) = 0,8$
- ▶ zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- ▶ pst, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

- ▶ pst, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,268$$

- ▶ pst, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: zkoušky

- ▶ C – zdar = udělat zkoušku, $P(C) = 0,8$
- ▶ zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- ▶ pst, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

- ▶ pst, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,268$$

- ▶ pst, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: zkoušky

- ▶ C – zdar = udělat zkoušku, $P(C) = 0,8$
- ▶ zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- ▶ pst, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

- ▶ pst, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,268$$

- ▶ pst, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: zkoušky

- ▶ C – zdar = udělat zkoušku, $P(C) = 0,8$
- ▶ zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- ▶ pst, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

- ▶ pst, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,268$$

- ▶ pst, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: zkoušky

- ▶ C – zdar = udělat zkoušku, $P(C) = 0,8$
- ▶ zkoušku dělá $n = 10$ studentů stejně připravených (u všech stejná pravděpodobnost π), studenti neopisují (nezávislost)
- ▶ pst, že zkoušku udělá nějakých 9 studentů

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2^1 = 0,268$$

- ▶ pst, že právě jeden student (nějaký) zkoušku neudělá

$$P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,268$$

- ▶ pst, že zkoušku udělá **daných** 9 studentů: 0,0268

příklad: kouření

- ▶ víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků (např. je-li 70 tisíc dvacetiletých, pak je mezi nimi asi 24 500 kuřáků, ale nevíme, kteří to jsou)
- ▶ vybereme náhodně 60 dvacetiletých mužů, X – počet kuřáků mezi nimi, tedy $X \sim \text{bi}(60, 0,35)$



$$\mu_X = 60 \cdot 0,35 = 21 \quad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 13,65 = (3,7)^2$$

- ▶ ukázky pravděpodobností možných hodnot

[BINOMDIST(15;60;0,35;0)]

[dbinom(15,60,0.35)]

k	15	17	19	21	23	25
$P(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

příklad: kouření

- ▶ víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků (např. je-li 70 tisíc dvacetiletých, pak je mezi nimi asi 24 500 kuřáků, ale nevíme, kteří to jsou)
- ▶ vybereme náhodně 60 dvacetiletých mužů, X – počet kuřáků mezi nimi, tedy $X \sim \text{bi}(60, 0,35)$



$$\mu_X = 60 \cdot 0,35 = 21 \quad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 13,65 = (3,7)^2$$

- ▶ ukázky pravděpodobností možných hodnot

[BINOMDIST(15;60;0,35;0)]

[dbinom(15,60,0.35)]

k	15	17	19	21	23	25
$P(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

příklad: kouření

- ▶ víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků (např. je-li 70 tisíc dvacetiletých, pak je mezi nimi asi 24 500 kuřáků, ale nevíme, kteří to jsou)
- ▶ vybereme náhodně 60 dvacetiletých mužů, X – počet kuřáků mezi nimi, tedy $X \sim \text{bi}(60, 0,35)$



$$\mu_X = 60 \cdot 0,35 = 21 \quad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 13,65 = (3,7)^2$$

- ▶ ukázky pravděpodobností možných hodnot

[BINOMDIST(15;60;0,35;0)]

[dbinom(15,60,0.35)]

k	15	17	19	21	23	25
$P(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

příklad: kouření

- ▶ víme, že mezi dvacetiletými muži je (řekněme) 35 % kuřáků (např. je-li 70 tisíc dvacetiletých, pak je mezi nimi asi 24 500 kuřáků, ale nevíme, kteří to jsou)
- ▶ vybereme náhodně 60 dvacetiletých mužů, X – počet kuřáků mezi nimi, tedy $X \sim \text{bi}(60, 0,35)$



$$\mu_X = 60 \cdot 0,35 = 21 \quad \sigma_X^2 = 60 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 13,65 = (3,7)^2$$

- ▶ ukázky pravděpodobností možných hodnot

[BINOMDIST(15;60;0,35;0)]

[dbinom(15,60,0.35)]

k	15	17	19	21	23	25
$P(X = k)$	0,029	0,062	0,095	0,107	0,091	0,059

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů), $Y \sim Po(\lambda)$
- ▶ Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné ...) jednotce
- ▶ $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- ▶ střední hodnota, (populační) rozptyl

$$\mu_Y = \lambda, \quad \sigma_Y^2 = \lambda$$

- ▶ u binomického rozdělení bylo $\mu_X > \sigma_X^2$, zde rovnost

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů), $Y \sim Po(\lambda)$
- ▶ Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné ...) jednotce
- ▶ $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- ▶ střední hodnota, (populační) rozptyl

$$\mu_Y = \lambda, \quad \sigma_Y^2 = \lambda$$

- ▶ u binomického rozdělení bylo $\mu_X > \sigma_X^2$, zde rovnost

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů), $Y \sim Po(\lambda)$
- ▶ Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné ...) jednotce
- ▶ $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- ▶ střední hodnota, (populační) rozptyl

$$\mu_Y = \lambda, \quad \sigma_Y^2 = \lambda$$

- ▶ u binomického rozdělení bylo $\mu_X > \sigma_X^2$, zde rovnost

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů), $Y \sim Po(\lambda)$
- ▶ Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné ...) jednotce
- ▶ $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- ▶ střední hodnota, (populační) rozptyl

$$\mu_Y = \lambda, \quad \sigma_Y^2 = \lambda$$

- ▶ u binomického rozdělení bylo $\mu_X > \sigma_X^2$, zde rovnost

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (1)

- ▶ diskrétní rozdělení (zákon vzácných jevů), $Y \sim Po(\lambda)$
- ▶ Y – počet výskytů jevu ve zvolené časové (prostorové, plošné ...) jednotce
- ▶ $\lambda > 0$ – jediný parametr, intenzita výskytu jevu (jak často se v průměru vyskytuje ve zvolené jednotce)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- ▶ střední hodnota, (populační) rozptyl

$$\mu_Y = \lambda, \quad \sigma_Y^2 = \lambda$$

- ▶ u binomického rozdělení bylo $\mu_X > \sigma_X^2$, zde rovnost

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (2)

- ▶ parametr λ znamená hustotu na jednotku plochy (populační průměr počtu případů na jednotku)
- ▶ změníme-li jednotku plochy, změní se parametr: při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku původní jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase ...), bude novým parametrem 3λ
- ▶ analogicky pro jiné kladné násobky
- ▶ aproximace: $X \sim \text{bi}(n, \pi)$, n velké, π malé ($\mu_X = n \cdot \pi$) pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim \text{Po}(n \cdot \pi)$
- ▶ Poissonovo rozdělení $\text{Po}(n \cdot \lambda)$ aproximuje binomické $\text{bi}(n, \pi)$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (2)

- ▶ parametr λ znamená hustotu na jednotku plochy (populační průměr počtu případů na jednotku)
- ▶ změníme-li jednotku plochy, změní se parametr: při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku původní jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase ...), bude novým parametrem 3λ
- ▶ analogicky pro jiné kladné násobky
- ▶ aproximace: $X \sim \text{bi}(n, \pi)$, n velké, π malé ($\mu_X = n \cdot \pi$) pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim \text{Po}(n \cdot \pi)$
- ▶ Poissonovo rozdělení $\text{Po}(n \cdot \lambda)$ aproximuje binomické $\text{bi}(n, \pi)$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (2)

- ▶ parametr λ znamená hustotu na jednotku plochy (populační průměr počtu případů na jednotku)
- ▶ změníme-li jednotku plochy, změní se parametr: při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku původní jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase ...), bude novým parametrem 3λ
- ▶ analogicky pro jiné kladné násobky
- ▶ aproximace: $X \sim bi(n, \pi)$, n velké, π malé ($\mu_X = n \cdot \pi$) pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim Po(n \cdot \pi)$
- ▶ Poissonovo rozdělení $Po(n \cdot \lambda)$ aproximuje binomické $bi(n, \pi)$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (2)

- ▶ parametr λ znamená hustotu na jednotku plochy (populační průměr počtu případů na jednotku)
- ▶ změníme-li jednotku plochy, změní se parametr: při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku původní jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase ...), bude novým parametrem 3λ
- ▶ analogicky pro jiné kladné násobky
- ▶ aproximace: $X \sim \text{bi}(n, \pi)$, n velké, π malé ($\mu_X = n \cdot \pi$) pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim \text{Po}(n \cdot \pi)$
- ▶ Poissonovo rozdělení $\text{Po}(n \cdot \lambda)$ aproximuje binomické $\text{bi}(n, \pi)$

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ (2)

- ▶ parametr λ znamená hustotu na jednotku plochy (populační průměr počtu případů na jednotku)
- ▶ změníme-li jednotku plochy, změní se parametr: při počítání pravděpodobností toho, kolikrát najdeme případ na trojnásobku původní jednotky (trojnásobné ploše, ve trojnásobném čase . . .), bude novým parametrem 3λ
- ▶ analogicky pro jiné kladné násobky
- ▶ aproximace: $X \sim \text{bi}(n, \pi)$, n velké, π malé ($\mu_X = n \cdot \pi$) pak pravděpodobnosti hodnot X lze aproximovat (přibližně vyjádřit) pomocí pravděpodobností hodnot $Y \sim \text{Po}(n \cdot \pi)$
- ▶ Poissonovo rozdělení $\text{Po}(n \cdot \lambda)$ aproximuje binomické $\text{bi}(n, \pi)$

příklady Poissonova rozdělení

- ▶ do pasti padá za noc v průměru 8 brouků ($\lambda = 8$)
- ▶ s jakou pravděpodobností jich tam ráno najdeme 10?
[POISSON(10;8;0)] [dpois(10,8)]

$$P(Y = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} = 0,099$$

- ▶ vezmeme-li past s polovičním obvodem, očekáváme poloviční průměr za noc ($\lambda = 4$)

$$P(Y = 10) = \frac{4^{10}}{10!} e^{-4} = 0,005$$

$$P(Y = 5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0,156$$

příklady Poissonova rozdělení

- ▶ do pasti padá za noc v průměru 8 brouků ($\lambda = 8$)
- ▶ s jakou pravděpodobností jich tam ráno najdeme 10?
[POISSON(10;8;0)] [dpois(10,8)]

$$P(Y = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} = 0,099$$

- ▶ vezmeme-li past s polovičním obvodem, očekáváme poloviční průměr za noc ($\lambda = 4$)

$$P(Y = 10) = \frac{4^{10}}{10!} e^{-4} = 0,005$$

$$P(Y = 5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0,156$$

příklady Poissonova rozdělení

- ▶ do pasti padá za noc v průměru 8 brouků ($\lambda = 8$)
- ▶ s jakou pravděpodobností jich tam ráno najdeme 10?
[POISSON(10;8;0)] [dpois(10,8)]

$$P(Y = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} = 0,099$$

- ▶ vezmeme-li past s polovičním obvodem, očekáváme poloviční průměr za noc ($\lambda = 4$)

$$P(Y = 10) = \frac{4^{10}}{10!} e^{-4} = 0,005$$

$$P(Y = 5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0,156$$

souvislost binomického a Poissonova rozdělení

- ▶ s jakou pravděpodobností **neudělá** 12 z 50 stejně připravených studentů zkoušku? (pst neúspěchu = 0,2)
- ▶ binomické rozdělení $bi(50, 0,2)$
[BINOMDIST(12;50;0,2)] [dbinom(12,50,0.2)]

$$P(X = 12) = \binom{50}{12} \cdot 0,2^{12} \cdot 0,8^{38} = 0,103$$

- ▶ Poissonovo rozdělení $Po(50 \cdot 0,2)=Po(10)$
[POISSON(12;10;0)] [dpois(12,10)]

$$P(Y = 12) = \frac{10^{12}}{12!} e^{-10} = 0,095$$

souvislost binomického a Poissonova rozdělení

- ▶ s jakou pravděpodobností **neudělá** 12 z 50 stejně připravených studentů zkoušku? (pst neúspěchu = 0,2)
- ▶ binomické rozdělení $bi(50, 0,2)$
[BINOMDIST(12;50;0,2)] [dbinom(12,50,0.2)]

$$P(X = 12) = \binom{50}{12} \cdot 0,2^{12} \cdot 0,8^{38} = 0,103$$

- ▶ Poissonovo rozdělení $Po(50 \cdot 0,2)=Po(10)$
[POISSON(12;10;0)] [dpois(12,10)]

$$P(Y = 12) = \frac{10^{12}}{12!} e^{-10} = 0,095$$

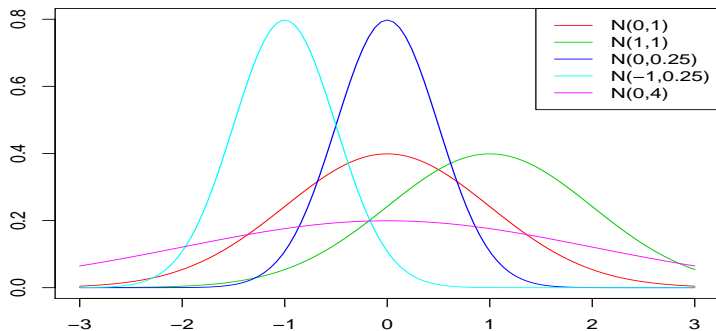
souvislost binomického a Poissonova rozdělení

- ▶ s jakou pravděpodobností **neudělá** 12 z 50 stejně připravených studentů zkoušku? (pst neúspěchu = 0,2)
- ▶ binomické rozdělení $bi(50, 0,2)$
[BINOMDIST(12;50;0,2)] [dbinom(12,50,0.2)]

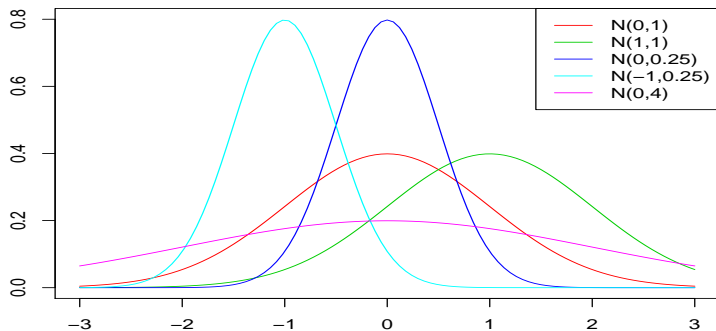
$$P(X = 12) = \binom{50}{12} \cdot 0,2^{12} \cdot 0,8^{38} = 0,103$$

- ▶ Poissonovo rozdělení $Po(50 \cdot 0,2) = Po(10)$
[POISSON(12;10;0)] [dpois(12,10)]

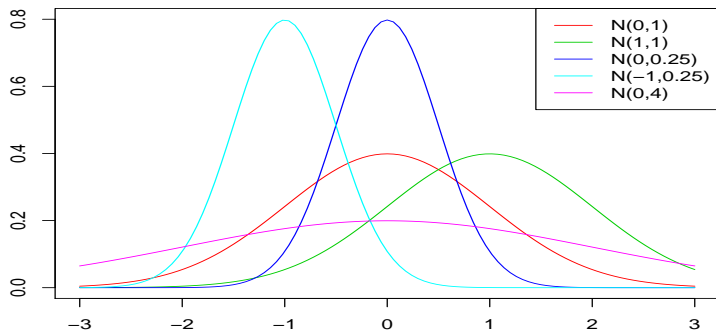
$$P(Y = 12) = \frac{10^{12}}{12!} e^{-10} = 0,095$$

normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ 

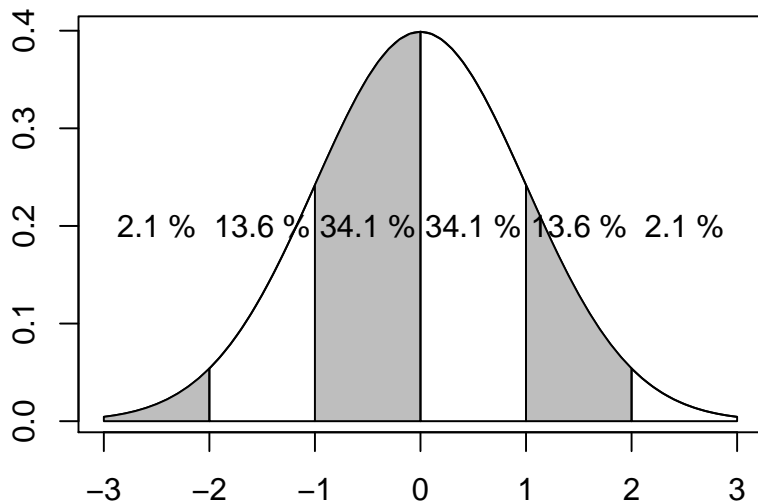
- ▶ spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty μ
- ▶ maximální hodnota hustoty je úměrná $1/\sigma$ ($\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \doteq \frac{0,4}{\sigma}$)
- ▶ model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků

normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ 

- ▶ spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty μ
- ▶ maximální hodnota hustoty je úměrná $1/\sigma$ ($\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \doteq \frac{0,4}{\sigma}$)
- ▶ model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků

normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ 

- ▶ spojité rozdělení, symetrické okolo střední hodnoty μ
- ▶ maximální hodnota hustoty je úměrná $1/\sigma$ ($\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \doteq \frac{0,4}{\sigma}$)
- ▶ model vzniku: součet velkého počtu nepatrných příspěvků

normované normální rozdělení $Z \sim N(0, 1)$ Hustota $N(0,1)$ 

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

příklady pravděpodobností o normálním rozdělení

- ▶ pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mu_X = E X = \mu$$

$$\sigma_X^2 = E (X - \mu_X)^2 = \sigma^2$$

- ▶ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$P(|Z| < c) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < c\right) = P(|X - \mu| < c \cdot \sigma)$$

- ▶ tedy

$$P(|X - \mu| < 1,00 \sigma) = 0,68, \text{ tj. } 68 \%$$

$$P(|X - \mu| < 1,96 \sigma) = 0,95, \text{ tj. } 95 \%$$

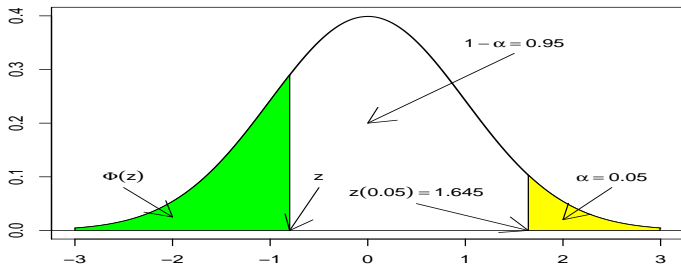
$$P(|X - \mu| < 2,00 \sigma) = 0,9545, \text{ tj. } 95,45 \%$$

$$P(|X - \mu| < 3,00 \sigma) = 0,9973, \text{ tj. } 99,73 \%$$

normované normální rozdělení $Z \sim N(0, 1)$

tabelováno:

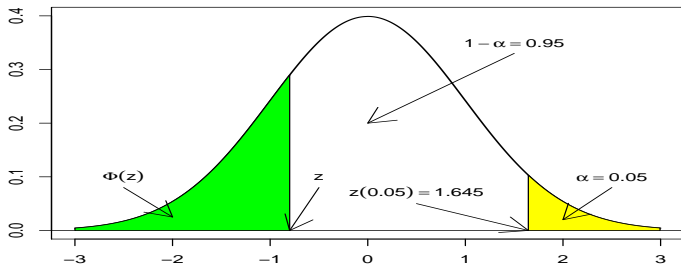
- ▶ hustota $\varphi(z)$
[NORMDIST(z ;0;1)] [dnorm(z)]
- ▶ distribuční funkce $\Phi(z) = P(Z \leq z)$
[NORMSDIST(z)] [pnorm(z)]
- ▶ kritické hodnoty $z(\alpha)$: $P(Z \leq z(\alpha)) = \Phi(z(\alpha)) = 1 - \alpha$
[NORMSINV(z)] [qnorm(z)]



normované normální rozdělení $Z \sim N(0, 1)$

tabelováno:

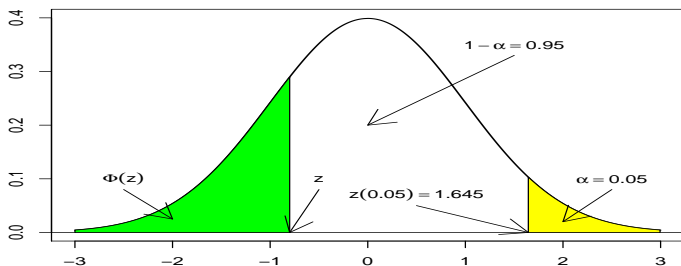
- ▶ hustota $\varphi(z)$
[NORMDIST(z ;0;1)] [dnorm(z)]
- ▶ distribuční funkce $\Phi(z) = P(Z \leq z)$
[NORMSDIST(z)] [pnorm(z)]
- ▶ kritické hodnoty $z(\alpha)$: $P(Z \leq z(\alpha)) = \Phi(z(\alpha)) = 1 - \alpha$
[NORMSINV(z)] [qnorm(z)]



normované normální rozdělení $Z \sim N(0, 1)$

tabelováno:

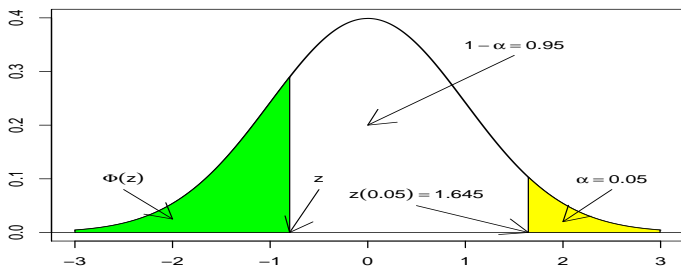
- ▶ hustota $\varphi(z)$
[NORMDIST(z ;0;1)] [dnorm(z)]
- ▶ distribuční funkce $\Phi(z) = P(Z \leq z)$
[NORMSDIST(z)] [pnorm(z)]
- ▶ **kritické hodnoty** $z(\alpha)$: $P(Z \leq z(\alpha)) = \Phi(z(\alpha)) = 1 - \alpha$
[NORMSINV(z)] [qnorm(z)]



normované normální rozdělení $Z \sim N(0, 1)$

tabelováno:

- ▶ hustota $\varphi(z)$
[NORMDIST(z ;0;1)] [dnorm(z)]
- ▶ distribuční funkce $\Phi(z) = P(Z \leq z)$
[NORMSDIST(z)] [pnorm(z)]
- ▶ **kritické hodnoty** $z(\alpha)$: $P(Z \leq z(\alpha)) = \Phi(z(\alpha)) = 1 - \alpha$
[NORMSINV(z)] [qnorm(z)]



zajímavé kritické hodnoty

$$z(0,025) = 1,96 \text{ tj. } P(Z > 1,96) = 2,5 \%$$

$$z(0,025) = 1,96 \text{ tj. } P(Z < -1,96) = 2,5 \%$$

$$z(0,025) = 1,96 \text{ tj. } P(|Z| > 1,96) = 5 \%$$

$$z(0,005) = 2,58 \text{ tj. } P(Z > 2,58) = 0,5 \%$$

$$z(0,005) = 2,58 \text{ tj. } P(Z < -2,58) = 0,5 \%$$

$$z(0,005) = 2,58 \text{ tj. } P(|Z| > 2,58) = 1 \%$$

$$z(0,050) = 1,64 \text{ tj. } P(Z > 1,64) = 5 \%$$

$$z(0,050) = 1,64 \text{ tj. } P(Z < -1,64) = 5 \%$$

$$z(0,050) = 1,64 \text{ tj. } P(|Z| > 1,64) = 10 \%$$

výpočet pravděpodobností pro $Z \sim N(0, 1)$

- ▶ u spojitého rozdělení je $P(X < x) = P(X \leq x)$, tedy i u Z
- ▶ $Z \sim N(0, 1)$, $a < b$, pak $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- ▶ odvození: jevy $(Z \leq a)$ a $(a < Z \leq b)$ jsou neslučitelné (tvrzení nemohou platit současně)
jejich sjednocením je jev $(Z \leq b)$, proto

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a < Z \leq b)$$

$$\Phi(b) = \Phi(a) + P(a < Z \leq b)$$

- ▶ příklad: $P(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,977 - 0,841 = 0,136$, jak bylo na obrázku

`[NORMSDIST(2)-NORMSDIST(1)]`

`[pnorm(2)-pnorm(1)]`

výpočet pravděpodobností pro $Z \sim N(0, 1)$

- ▶ u spojitého rozdělení je $P(X < x) = P(X \leq x)$, tedy i u Z
- ▶ $Z \sim N(0, 1)$, $a < b$, pak $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- ▶ odvození: jevy $(Z \leq a)$ a $(a < Z \leq b)$ jsou neslučitelné (tvrzení nemohou platit současně)
jejich sjednocením je jev $(Z \leq b)$, proto

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a < Z \leq b)$$

$$\Phi(b) = \Phi(a) + P(a < Z \leq b)$$

- ▶ příklad: $P(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,977 - 0,841 = 0,136$, jak bylo na obrázku

`[NORMSDIST(2)-NORMSDIST(1)]`

`[pnorm(2)-pnorm(1)]`

výpočet pravděpodobností pro $Z \sim N(0, 1)$

- ▶ u spojitého rozdělení je $P(X < x) = P(X \leq x)$, tedy i u Z
- ▶ $Z \sim N(0, 1)$, $a < b$, pak $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- ▶ odvození: jevy $(Z \leq a)$ a $(a < Z \leq b)$ jsou neslučitelné (tvrzení nemohou platit současně)
jejich sjednocením je jev $(Z \leq b)$, proto

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a < Z \leq b)$$

$$\Phi(b) = \Phi(a) + P(a < Z \leq b)$$

- ▶ příklad: $P(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,977 - 0,841 = 0,136$, jak bylo na obrázku

`[NORMSDIST(2)-NORMSDIST(1)]`

`[pnorm(2)-pnorm(1)]`

výpočet pravděpodobností pro $Z \sim N(0, 1)$

- ▶ u spojitého rozdělení je $P(X < x) = P(X \leq x)$, tedy i u Z
- ▶ $Z \sim N(0, 1)$, $a < b$, pak $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- ▶ odvození: jevy $(Z \leq a)$ a $(a < Z \leq b)$ jsou neslučitelné (tvrzení nemohou platit současně)
jejich sjednocením je jev $(Z \leq b)$, proto

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a < Z \leq b)$$

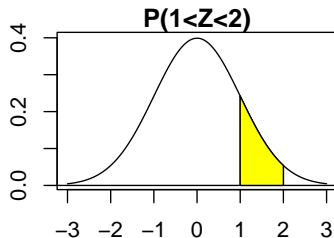
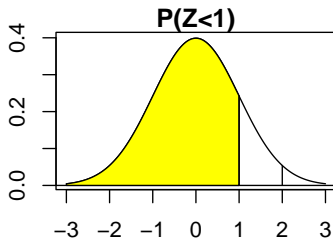
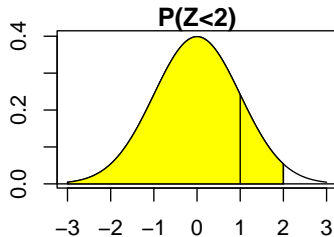
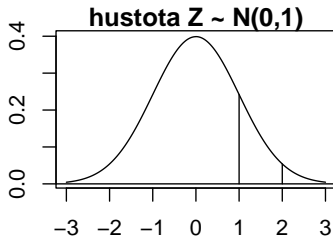
$$\Phi(b) = \Phi(a) + P(a < Z \leq b)$$

- ▶ příklad: $P(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,977 - 0,841 = 0,136$, jak bylo na obrázku

`[NORMSDIST(2)-NORMSDIST(1)]`

`[pnorm(2)-pnorm(1)]`

Postup výpočtu $P(1 < Z < 2)$ ($Z \sim N(0, 1)$)
pomocí tabelované funkce $\Phi(z) = F_Z(z) = P(Z \leq z)$



výpočet pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

příklad: $X \sim N(136,1, 6,4^2)$ (výšky 10letých hochů v roce 1951)

$$\begin{aligned} P(134,5 < X < 140,5) &= \Phi\left(\frac{140,5 - 136,1}{6,4}\right) - \Phi\left(\frac{134,5 - 136,1}{6,4}\right) \\ &= 0,754 - 0,401 = 0,353 \end{aligned}$$

tedy v rozmezí 135 cm až 140 cm bylo asi 35,3 % hochů

pohodnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

pohodlnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

pohodnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

pohodnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

pohodnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]

pohodnější možnost

- ▶ $X \sim N(136,1, 6,4^2)$
- ▶ počítáme $P(134,5 < X < 140,5)$
- ▶ Excel i R nabízejí možnost dosadit skutečné parametry normálního rozdělení
- ▶ druhým parametrem je **směrodatná odchylka**
- ▶ Excel (nepřehlédněte, že nejde o NORMSDIST!):
[NORMDIST(140,5;136,1;6,4;1)-NORMDIST(134,5;136,1;6,4;1)]
- ▶ R:
[pnorm(140.5,136.1,6.4)-pnorm(134.5,136.1,6.4)]